WORLD CULTURAL CENTRE ANADRASIS
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΟΛΙΤΙΣΤΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ
Τόμος Πρακτικών Φιλοσοφικού Forum «
ISBN: 978-618-82935-0-2
ΔΙΕΘΝΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΤΑΙΡΙΑ
ΑΡΧΑΙΑΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ

ΗΘΙΚΗ ΧΡΕΩΚΟΠΙΑ
Ή ΧΡΕΩΚΟΠΙΑ ΤΗΣ ΗΘΙΚΗΣ;

Δημήτριος Γ. Κωνσταντινίδης
Καθηγητής Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Έχει παρατηρηθεί ότι οι ρόλοι του δανειστή και του δανειζόμενου εναλλάσσονται. Για παράδειγμα, η Ελλάδα δάνεισε στην Γερμανία το κατοχικό δάνειο το 1943 και στη συνέχεια από δανειστής πέρασε στον ρόλο του δανειζόμενου. Οπότε το ζήτημα τίθεται στο κατά πόσον διατηρεί την ίδια άποψη είτε ως δανειστής ή σαν δανειζόμενος.

Παραπέρα η κοινωνία διαχωρίζεται σε κοινωνικά στρώματα που βιώνουν διαφορετικά τις επιπτώσεις των οικονομικών αλλαγών. Το εύλογο αίτημα που συνήθως προβάλλεται ¨Να πληρώσουν αυτοί που φάγανε¨, σκοντάφτει στην αναζήτηση αυτών που επωφελήθηκαν από τον υπερδανεισμό. Σε αυτή τη περίπτωση ποιος θα επιστρέψει τα δανεικά στα ταμεία του κράτους;

1 Πιθανότητα χρεωκοπίας

Η θεωρία συλλογικού κινδύνου στηρίζεται στην έννοια της στοχαστικής διαδικασίας που επιτρέπει τη σωστή περιγραφή της διαδοχικής προσέλευσης αποζημιώσεων, που εμφανίζονται στα πλαίσια κάποιου ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου. Με την βοήθεια των στοχαστικών διαδικασιών μπορούμε να μοντελοποιήσουμε τις τυχαίες διακυμάνσεις του πλεονάσματος της ασφαλιστικής εταιρείας που χρησιμοποιείται για την πληρωμή των αποζημιώσεων.

Κάθε ασφαλιστική πολιτική στοχεύει στην ελάφρυνση των πελατών της από τον φόβο του κινδύνου που ενδεχόμενα θα συναντήσουν και τους διευκολύνει να αντιμετωπίσουν αποτελεσματικά τις συνέπειες τους, καλύπτοντας τις αποζημιώσεις που προκαλούνται από ατυχήματα. Οι πελάτες σε αντάλλαγμα καταβάλουν στην εταιρεία ασφάλιστρα για να εξασφαλίσουν την βιωσιμότητα της εταιρείας και να συμβάλουν στην δημιουργία του αναγκαίου πλεονάσματος. Προφανώς τα ασφάλιστρα θα πρέπει να ξεπερνούν το μέσο κόστος των αποζημιώσεων σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα, που σημαίνει ότι οι πελάτες δέχονται εξ΄ αρχής κάποια θετική επιβάρυνση ασφαλείας.

Ας υποθέσουμε ότι κάποια ασφαλιστική εταιρεία ξεκινά δραστηριότητα την στιγμή 0 με αρχικό κεφάλαιο $u \geq 0$ και το συνολικό εισόδημα από ασφάλιστρα που καταβάλλεται από τους πελάτες μέχρι και την στιγμή t παριστάνεται με $C(t)$. Το εισόδημα από ασφάλιστρα $C(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου. Συνήθως

ISBN: 978-618-82935-0-2

θεωρούμε την προσδιοριστική γραμμική συνάρτηση $C(t) = ct$ όπου η σταθερά c ονομάζεται ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου.

Οι χρονικές στιγμές $\{T_k , k = 1, 2, ...\}$ το σύνολο των διαδοχικών στιγμών εμφάνισης ατυχήματος και τα ύψη των αποζημιώσεων $\{Z_k , k = 1, 2, ...\}$ αποτελούν ακολουθίες ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Τις στιγμές εμφάνισης ατυχήματος μπορούμε να τις παραστήσουμε με την βοήθεια των αποστάσεων μεταξύ διαδοχικών στιγμών ατυχήματος $\theta_k = T_k - T_{k-1}$, για $k = 1, 2, ...$, όπου θεωρούμε $T_0 = 0$. Έστω $N(t) = \max\{k = 0, 1, ... : T_k \leq t\} = \min\{k = 0, 1, ... : T_{k+1} > t\}$ ο αριθμός των χρονικών στιγμών εμφάνισης ατυχήματος στο διάστημα $[0,t]$. Το ύψος της k αποζημίωσης συμβολίζεται με Z_k. Επομένως η συνολική αποζημίωση μέχρι και την στιγμή t, δίνεται από το τυχαίο άθροισμα $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$.

Υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι $\{\theta_k , k = 1, 2, ...\}$ αποτελούν ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή $A(x) = \mathbf{P}[\theta_1 \leq x]$. Οι ροπές των ενδιάμεσων χρόνων k τάξης, για $k = 0, 1, ...$, εάν υπάρχουν, συμβολίζονται με

$$a_k = \mathbf{E}[\theta_1^k] = \int_0^\infty y^k \, A(dy) \, .$$

Υποθέτουμε ότι τα ύψη των αποζημιώσεων $\{Z_k , \; k = 1, 2, \ldots\}$ αποτελούν μια ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή $B(x) = \mathbf{P}[Z_1 \leq x]$ και συμβολίζουμε την ουρά της κατανομής με $\overline{B}(x) = \mathbf{P}[Z_1 > x] = 1 - B(x)$.

Δεχόμαστε ότι $\sup_{x<0} B(x) = 0$ και $B(0) < 1$, που σημαίνει ότι τα ύψη των αποζημιώσεων παίρνουν μη αρνητικές τιμές και δεν εκφυλλίζονται στην μηδενική προσδιοριστική τυχαία μεταβλητή, δηλαδή $\mathbf{P}[Z_1 > 0] > 0$. Οι ροπές των αποζημιώσεων εάν υπάρχουν συμβολίζονται με

$$b_k = \mathbf{E}[Z_1^k] = \int_0^\infty y^k \, B(dy) \, ,$$

για $k = 0, 1, ...$ Υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες $\{T_k , k = 1, 2, ...\}$ και $\{Z_k , k = 1, 2, ...\}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Με τα μεγέθη που παρουσιάσαμε, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την διαδικασία πλεονάσματος στην μορφή $U(t) = u + C(t) - S(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$. Το ύψος του πλεονάσματος σε κάθε στιγμή αποτελεί στοχαστική διαδικασία καθώς στα εμπλεκόμενα μεγέθη περιλαμβάνονται οι τυχαίες μεταβλητές $\{T_k, k = 1, 2, ...\}$ και $\{Z_k, k = 1, 2, ...\}$. Η διαφορά $C(t) - S(t) = ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ δηλώνει την επιβάρυνση ασφαλείας και δίνει σημαντική πληροφορία για την αξιοπιστία της ασφαλιστικής δραστηριότητας. Στην πράξη χρησιμοποιούμε κυρίως το όριο

ISBN: 978-618-82935-0-2

$$\rho = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{E}[C(t) - S(t)]}{\mathbf{E}[S(t)]},$$

που είναι γνωστό με το όνομα σχετική επιβάρυνση ασφαλείας. Η σχετική επιβάρυνση ασφαλείας περιγράφει το αναμενόμενο εισόδημα της ασφαλιστικής εταιρείας ανά μονάδα αποζημίωσης. ΄Οταν το ρ πλησιάζει στο μηδέν, η ασφαλιστική εταιρεία μένει χωρίς πλεόνασμα και ο κίνδυνος χρεωκοπίας της μεγαλώνει. ΄Οταν το ρ γίνεται μεγάλο η εταιρεία παρουσιάζει κερδοφορία αλλά τα ασφάλιστρά της είναι αποθαρρυντικά για τους υποψήφιους πελάτες.

Στη συνέχεια αξιώνουμε ότι αυτή η σχετική επιβάρυνση ασφαλείας υπάρχει και είναι θετική, δηλαδή ισχύει $\rho > 0$. Αυτή η υπόθεση είναι ευρέως αποδεκτή στην αναλογιστική πρακτική και ονομάζεται *Αξίωμα Καθαρού Κέρδους*. Μάλιστα το *Αξίωμα Καθαρού Κέρδους* πρακτικά σημαίνει ότι η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ έχει αυξητική τάση, που είναι αναγκαία προϋπόθεση για να ελπίζουμε στην κερδοφορία της εταιρείας. Η διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$ περιέχει την πληροφορία που χρειάζεται για την αξιολόγηση της βιωσιμότητας της ασφαλιστικής επιχείρησης στα πλαίσια κάποιου μοντέλου κινδύνου, παριστάμενου συνήθως από την τριάδα (A, C, B).

Εάν το πλεόνασμα πάρει αρνητική τιμή σε κάποια χρονική στιγμή $t > 0$, λέμε ότι παρουσιάζεται χρεωκοπία. Η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου παίρνει την μορφή $\psi(u) = \mathbf{P}[\inf_{t>0} U(t) < 0|U(0) = u]$. Η πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u)$ χρησιμεύει σαν δείκτης ποιότητας της ασφαλιστικής δραστηριότητας. Δηλαδή όσο μικρότερη πιθανότητα χρεωκοπίας βρίσκουμε, τόσο καλύτερη ασφαλιστική εταιρεία έχουμε από άποψη βιωσιμότητας. Το επίπεδο πλεονάσματος μετά το οποίο θεωρούμε ότι η εταιρεία περνάει σε χρεωκοπία, παίρνεται συνήθως ίσο με το μηδέν. Η στιγμή χρεωκοπίας συμβολίζεται με $\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0 \mid U(0) = u\}$, οπότε η πιθανότητα χρεωκοπίας γράφεται στην μορφή $\psi(u) = \mathbf{P}[\tau(u) < \infty]$. Στην γενική περίπτωση ο χρόνος χρεωκοπίας $\tau(u)$ είναι μια ελλιπής τυχαία μεταβλητή (δηλαδή η συνάρτηση κατανομής δεν έχει συνολικό βάρος την μονάδα) καθώς μπορεί να πάρει την τιμή ∞ (άπειρο) με θετική πιθανότητα $\mathbf{P}[\tau(u) = \infty] > 0$. Πράγματι, διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε ότι κάτω από το *Αξίωμα Καθαρού Κέρδους* το πλεόνασμα $U(t)$ τείνει στο άπειρο και γι΄ αυτό είναι πιθανό να μην εμφανιστεί ποτέ χρεωκοπία.

Η συμπληρωματική συνάρτηση $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$ ονομάζεται πιθανότητα επιβίωσης και παίρνει την μορφή $\varphi(u) = \mathbf{P}[\inf_{t>0} U(t) \geq 0|U(0) = u] = \mathbf{P}[\tau(u) = \infty]$.

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεωκοπίας μπορούμε να θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή $U_n = U(T_n)$, που συμβολίζει το πλεόνασμα ακριβώς μετά την πληρωμή της n αποζημίωσης, οπότε βρίσκουμε το ακόλουθο διακριτό μοντέλο αναγωγικών εξισώσεων $U_0 = u$, $U_{n+1} = U_n + c\theta_{n+1} - Z_{n+1}$, για κάθε $n = 0, 1, \ldots$.

ISBN: 978-618-82935-0-2

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ακολουθία $\{U_n, n = 0, 1, ...\}$ αποτελεί ομογενή μαρκοβιανή αλυσίδα με τιμές από το σύνολο των πραγματικών $(-\infty, \infty)$. Καθώς το ενδεχόμενο χρεωκοπίας μπορεί να εμφανιστεί μόνο κατά τις στιγμές εμφάνισης αποζημιώσεων $\{T_n, n = 1, 2, ...\}$, η πιθανότητα χρεωκοπίας παίρνει διακριτή μορφή $\psi(u) = \mathbf{P}[\inf_{n\geq 1} U_n < 0 | U_0 = u]$.

Η πιθανότητα χρεωκοπίας υπολογίζεται με βάση τις ποικίλες παραμέτρους του μοντέλου κινδύνου και γι΄ αυτό η πετυχημένη επιλογή του μοντέλου επιβεβαιώνεται με τις συγκρίσεις μεταξύ αρχικών δεδομένων και τελικών αποτελεσμάτων στην λειτουργία της εταιρείας. ΄Εχοντας αυτή την προοπτική στο μυαλό μας, θα αναπτύξουμε μαθηματικές μεθόδους για τον υπολογισμό ή την εκτίμηση της πιθανότητας χρεωκοπίας.

2 Ηθικές συνέπειες της χρεωκοπίας

Με βάση τα ποσοτικά αποτελέσματα η αποφυγή της απόλυτης χρεοκοπίας γίνεται με ασυμπτωτικό μηδενισμό του ρυθμού τοκισμού δ. Αυτό επιφέρει χαμηλό κόστος δανεισμού και ανοίγει τη πόρτα της άφθονης παροχής χρήματος.

Ωστόσο, αν αυτό το μέτρο βοηθάει τους υπερδανεισμένους, δεν σημαίνει ότι συμφέρει τους επενδυτές. Με τα χαμηλά (σχεδόν μηδενικά) επιτόκια δεν έχουν κίνητρο για επενδύσεις και προτιμούν να κρατούν τα κεφάλαιά τους σε αργία. Επομένως σε περίοδο μακροχρόνιου μηδενισμού του ρυθμού τοκισμού το αποτέλεσμα της ύφεσης επανακάμπτει από την υπονόμευση της επενδυτικής λειτουργίας. Ειδικότερα η απομείωση των εσόδων των επενδυτών αποτελεί περισσότερο κίνδυνο παρά όφελος στη λειτουργία της αγοράς. Και ειδικότερα το αίτημα να προσφέρουν οι επενδυτές την δική τους συμβολή στην υποστήριξη των υπερχρεωμένων μονάδων έχει κάποιο περιορισμένο χρονικό πλαίσιο. Αντίθετα, σε παρατεταμένη ύφεση και αυτό το αίτημα γίνεται επιβαρυντικό στην εξομάλυνση της ισορροπίας στην ελεύθερη αγορά.

3 Κατανομές με Βαριές Ουρές

΄Εστω Z η γενική τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στο ύψος αποζημίωσης με κατανομή $B(x) = \mathbf{P}[Z \leq x]$. Λέμε ότι η B είναι κατανομή με ελαφριές ουρές, εάν υπάρχει κάποιος θετικός αριθμός $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\mathbf{E}[e^{\varepsilon Z}] = \int_0^\infty e^{\varepsilon y} B(dy) < \infty .$$

Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει για κάθε $\varepsilon > 0$, η συνθήκη Cram΄er δεν ισχύει.

Ορισμός 1. *Η κατανομή $B(x)$ λέμε ότι ανήκει στην κλάση των κατανομών με βαριές ουρές $\mathcal{K}$, και γράφουμε $\overline{B} \in \mathcal{K}$, εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει η σχέση*

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon\, y}\, B(dy) = \infty\,.$$

Είναι χρήσιμο να χαρακτηρίσουμε τις κατανομές των μεγάλων αποζημιώσεων με τη βοήθεια της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της ουράς της κατανομής $\overline{B}(x)$, για $x \to \infty$.

Θεωρούμε την ακολουθία $\{Z_1, Z_2, \ldots\}$ ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή $B(x)$. Με $A_n = \sum_{k=1}^n Z_k$ συμβολίζουμε το άθροισμα των n πρώτων και με $M_n = \max_{1\le k\le n} Z_k = \bigvee_{k=1}^n Z_k$ το μέγιστο. Προφανώς $\mathbf{P}[M_n > u] \le \mathbf{P}[A_n > u]$. Μας ενδιαφέρει η ιδιότητα της κατανομής $B(x)$, που εξασφαλίζει ότι η ουρά του αθροίσματος $\mathbf{P}[A_n > u]$ προσεγγίζεται από την ουρά του μεγίστου $\mathbf{P}[M_n > u] = 1 - B^2(u)$ όταν $u \to \infty$ για κάθε $n = 2, 3, \ldots$. Θα δούμε στη συνέχεια ότι αυτή η ιδιότητα κατατάσσει την κατανομή $B(x)$ στην κλάση $\mathcal{K}$, δηλαδή στην κλάση των κατανομών με βαριές ουρές.

Θεώρημα 1. *Εάν $\overline{B} \in \mathcal{K}$, τότε $\liminf_{u\to\infty} \frac{\overline{B^{2*}(u)}}{\overline{B}(u)} \ge 2$.*

4 Η κλάση των υποεκθετικών κατανομών

Ας δώσουμε τώρα τον ορισμό της υποεκθετικότητας.

Ορισμός 2. *Η ουρά της κατανομής $B(x)$ λέμε ότι ανήκει στη κλάση των υποεκθετικών συναρτήσεων, και γράφουμε $\overline{B} \in \mathcal{S}$, εάν για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ισχύει η συνθήκη*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}[A_n > x]}{\mathbf{P}[M_n > x]} = 1.$$

Ας θυμηθούμε ότι η κατανομή του αθροίσματος δίνεται στη μορφή $B^{n*}(x) = \mathbf{P}\left[\sum_{k=1}^n Z_k \le x\right]$ που αποτελεί την n-τάξης συνέλιξη της κατανομής $B(x)$. Οπότε στον αριθμητή του κλάσματος έχουμε την ουρά της συνέλιξης $\overline{B^{n*}}(x)$.

Παραπέρα για την ουρά του μέγιστου που βρίσκεται στον παρονομαστή γράφουμε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

ISBN: 978-618-82935-0-2

$$\frac{\mathbf{P}[M_n > x]}{n\overline{B}(x)} = \frac{1}{n\overline{B}(x)}\left(1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}[Z_k \le x]\right) = \frac{1 - B^n(x)}{n\overline{B}(x)} \to 1,$$

καθώς $x \to \infty$, όπου έχουμε $B(x) \to 1$ και χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα

$$\frac{1 - B^n(x)}{\overline{B}(x)} = 1 + B(x) + \ldots + B^{n-1}(x).$$

Έτσι η συνθήκη υποεκθετικότητας της $B(x)$ ισοδυναμεί με τη συνθήκη

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{B^{n*}}(x)}{\overline{B}(x)} = n. \tag{4.1}$$

Από το επόμενο αποτέλεσμα προκύπτει ότι εάν μια κατανομή B είναι υποεκθετική, τότε το υπερβάλλον στο επίπεδο x, συμβολικά $\{Z - x \,|\, Z > x\}$, συγκλίνει κατά κατανομή στο άπειρο. Πράγματι, η πιθανότητα το υπερβάλλον στο επίπεδο x να ξεπεράσει κάποιο επίπεδο y ισούται με $\overline{B}(x+y)/\overline{B}(x)$, που όπως θα δούμε για $x \to \infty$ τείνει στη μονάδα.

Λήμμα 1 (Chistyakov). Εάν $\overline{B}(x) \in S$, τότε ισχύει

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{B}(x-y)}{\overline{B}(x)} = 1 \tag{4.2}$$

για κάθε $y \in (-\infty, \infty)$.

Ορισμός 3. *Η ουρά της κατανομής $B(x)$ λέμε ότι ανήκει στην κλάση των μακριών ουρών, και γράφουμε $\overline{B} \in \mathcal{L}$, εάν για κάθε πραγματικό αριθμό y ισχύει η σχέση (4.2).*

Το προηγούμενο Λήμμα συνοψίζεται στη σχέση $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$. Στη συνέχεια θα δούμε ότι για να ελέγξουμε την υποεκθετικότητα δεν χρειάζεται να εξασφαλίσουμε την (4.1) για όλα τα $n = 2, 3, \ldots$. Αρκεί να το δείξουμε μόνο για $n = 2$.

Λήμμα 2. $\overline{B}(x) \in \mathcal{S}$ *εάν και μόνο εάν* $\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{B^{2*}}(x)}{\overline{B}(x)} = 2$.

5 Χρεωκοπία σε υποεκθετικότητα

Στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου (A, c, B) έχουμε μια αναπαράσταση για την πιθανότητα χρεωκοπίας συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής $H_N(x) = \mathbf{P}[S_{N_1} \le x | N_1 < \infty]$ και της πιθανότητας $q = \mathbf{P}[N_1 = \infty]$, που δίνεται με τον τύπο Pollaczeck-Khinchin ([2, σχέση (3.1.8)]). Από αυτή τη σχέση παίρνουμε μια ασυμπτωτική

έκφραση της πιθανότητας χρεωκοπίας καθώς $u \to \infty$ υπό συνθήκες υποεκθετικότητας (όταν $\overline{H_N} \in S$).

ISBN: 978-618-82935-0-2

Λήμμα 3. *Στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, εάν $\overline{H}_N \in \mathcal{S}$, ισχύει η ακόλουθη ασυμπτωτική σχέση για την πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u) \sim \frac{1-q}{q}\,\overline{H}_N(u)$, καθώς $u \to \infty$.*

Θεώρημα 2 (Embrechts-Veraverbeke). Στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου (A, c, B), δεχόμενοι το *Αξίωμα Καθαρού Κέρδους, εάν ισχύει $\overline{B}_0 \in \mathcal{S}$, τότε παίρνουμε την ακόλουθη ασυμπτωτική σχέση για την πιθανότητα χρεωκοπίας*

$$\psi(u) \sim \frac{b_1}{c\,a_1 - b_1}\,\overline{B}_0(u) = \frac{1}{\rho}\,\overline{B}_0(u) , \qquad (5.1)$$

καθώς $u \to \infty$.

Γυρνώντας στην κατανομή των αποζημιώσεων $B(x)$, υπό την προϋπόθεση $\overline{B}_0 \in \mathcal{S}$, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (5.1) στην ακόλουθη μορφή

$$\psi(u) \sim \frac{1}{c\,a_1 - b_1}\int_u^\infty \overline{B}(z)\,dz = \frac{1}{\rho\,b_1}\int_u^\infty \overline{B}(z)\,dz\,,$$

καθώς $u \to \infty$.

Έστω η συνάρτηση επικινδυνότητας $\Lambda(x) := -\ln \overline{B}(x) < \infty$. Ας θεωρήσουμε μια απολύτως συνεχή κατανομή $B(x)$ με πυκνότητα $b(x)$ και *ρυθμό επικινδυνότητας* $\lambda(x) = \frac{d\Lambda(x)}{dx} = \frac{b(x)}{\overline{B}(x)}$.

6 Μοντέλο Σταθερού Επιτοκίου

Τώρα εξετάζουμε το κλασικό μοντέλο κινδύνου (λ, c, B) με σταθερό ρυθμό τοκισμού $r \geq 0$. Θεωρούμε ότι η $\{U_r(t),\, t \geq 0\}$, που παριστά την διαδικασία του πλεονάσματος, ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$U_r(dt) = cdt + U_r(t)r\,dt - S(dt), \qquad (6.1)$$

(βλέπε [4, σελ. 8]). Αυτό σημαίνει, ότι πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης με το συντελεστή προεξόφλησης e^{-rt} και μετά από ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$U_r(t) = C\,e^{r\,t} + c\int_0^t e^{r\,(t-y)}dy - \int_0^t e^{r\,(t-y)}\,S(dy)$$

για κάποια σταθερά C. Για να βρούμε την τιμή της σταθεράς C παίρνουμε την αρχική συνθήκη $U_r(0) = u$,

WORLD CULTURAL CENTRE ANADRASIS
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΟΛΙΤΙΣΤΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ
Τόμος Πρακτικών Φιλοσοφικού Forum «...
ISBN: 978-618-82935-0-2
ΔΙΕΘΝΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΤΑΙΡΙΑ ΑΡΧΑΙΑΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ

που με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση δίνει $C = u$. Χρησιμοποιούμε τον αναλογιστικό συμβολισμό της τελικής αξίας συνεχούς ράντας, αντικαθιστώντας στη λύση της εξίσωσης (6.1) παίρνουμε το πλεόνασμα της ασφαλιστικής εταιρείας τη στιγμή t στη μορφή

$$U_r(t) = ue^{rt} + c\,\frac{e^{rt}-1}{r} - \int_0^t e^{r(t-y)}\,S(dy)\,.$$

Ας εισάγουμε τώρα την παρούσα αξία του πλεονάσματος $U_r(t)$ κατά τη στιγμή μηδέν

$$V_r(t) := e^{-rt}U_r(t) = u + c\,\frac{1-e^{-rt}}{r} - \int_0^t e^{-ry}\,S(dy)\,,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον αναλογιστικό συμβολισμό της αρχικής αξίας συνεχούς ράντας. Τώρα μπορούμε να ορίσουμε την *πιθανότητα χρεωκοπίας* με σταθερό ρυθμό τοκισμού $\psi_r(u)$ και αρχικό κεφάλαιο u ως εξής $\psi_r(u) = \mathbf{P}\left[\bigcup_{t\geq 0}\{V_r(t)<0\}\;\middle|\;V_r(0)=u\right]$. Θυμίζουμε το συμβολισμό της πιθανότητας επιβίωσης $\varphi_r(u) := \overline{\psi}_r(u) = 1-\psi_r(u)$ μιας ασφαλιστικής εταιρείας με αρχικό κεφάλαιο u, που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο η εταιρεία να μη χρεωκοπήσει ποτέ. Όπως βλέπουμε, η χρεωκοπία μπορεί να εμφανιστεί μόνο κατά τη στιγμή εμφάνισης κάποιας αποζημίωσης.

Έστω λοιπόν η διαδικασία Poisson $\{T_n\,,\, n = 0, 1, \ldots\}$, η οποία αντιπροσωπεύει την ακολουθία των χρονικών στιγμών, που εμφανίζονται οι αποζημιώσεις, με το $T_0 = 0$ συμβατικά και έστω $\{\theta_j = T_j - T_{j-1}\,,\, j = 1, 2, \ldots\}$ η ακολουθία των διαστημάτων μεταξύ διαδοχικών προσελεύσεων αποζημιώσεων, που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε $V_r(T_n) = u + c a_{T_n\, r} - {}^{n}{}_{k=1} Z_k\, e^{-rT_k}$ και $\psi_r(u) = \mathbf{P}$hinf$_{n\geq 1}$ $V_r(T_n) < 0$ $V_r(T_0) = u$i. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κατανομής της ολοκληρωμένηςP ουράς B_0 (βλέπε [1, Παράδειγμα 24]) έχουμε

$$\begin{aligned} c\,[\phi_r(u)-\phi_r(0)] + ru\phi_r(u) \quad &- \quad r\int_0^u \phi_r(t)dt \\ &= \quad \lambda\, b_1 \int_0^u \phi_r(u-z)\,B_0(dz)\,. \end{aligned}$$

Για να αποφύγουμε τις δυσκολίες, που δημιουργούνται από τα άλματα της $\phi_r(u)$ γύρω από το μηδέν, εισάγουμε τη βοηθητική κατανομή

$$G_r(u) := \frac{\phi_r(u)-\phi_r(0)}{\psi_r(0)} \qquad (6.2)$$

ISBN: 978-618-82935-0-2

Λύνοντας ως προς $\psi_r(u)$ βρίσκουμε $\psi_r(u) = \psi_r(0)\,\overline{G}_r(u)$. Συνεπώς με προσθαφαίρεση κατάλληλων όρων παίρνουμε

$$c\,G_r(u) + r\,u\,G_r(u) - r\int_0^u G_r(t)dt = K_r B_0(u) + \lambda\, b_1\, B_0 * G_r(u) \quad (6.3)$$

όπου $K_r := \lambda\, b_1 \frac{\phi_r(0)}{\psi_r(0)}$ και παίρνουμε την έκφραση $\psi_r(0) = \frac{\lambda\, b_1}{\lambda\, b_1 + K_r}$. Παραπέρα, μετά από ολοκλήρωση κατά παράγοντες, διαπιστώνουμε ότι

$$\int_0^u G_r(t)\,dt = uG_r(u) - \int_0^u t\,G_r(dt)\,,$$

απ΄ όπου η εξίσωση (6.3) παίρνει τη μορφή

$$G_r(u) = \frac{K_r}{c}\,B_0(u) - \frac{r}{c}\int_0^u t\,G_r(dt) + \frac{\lambda\, b_1}{c}\,B_0 * G_r(u) \quad (6.4)$$

Από το *Αξίωμα Καθαρού Κέρδους* (βλέπε [2, σχέση (1.2.2)]) εξασφαλίζουμε ότι $\lambda b_1 < c$ και έτσι βλέπουμε ότι η εξίσωση (6.4) προσλαμβάνει ανανεωτική μορφή. Ωστόσο, δεν αποτελεί ανανεωτική εξίσωση, διότι ο μη συνελικτικός όρος περιέχει την άγνωστη συνάρτηση G_r. Με βάση το [1, Θεώρημα 17], η λύση της (6.4) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$G_r(u) = \frac{1}{c - \lambda\, b_1}\left[K_r\, B_0(u) - r\int_0^u t\,G_r(dt)\right] * \phi(u) \quad (6.5)$$

όπου εδώ η πιθανότητα επιβίωσης **χωρίς** συνεχή τοκισμό

$$\phi(u) = \frac{c - \lambda\, b_1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\, b_1}{c}\right)^n B_0^{n*}(u),$$

αποτελεί ανανεωτική συνάρτηση με βάρη γεωμετρικής προόδου, όπως είδαμε από τον τύπο Pollaczeck-Khinchin (βλέπε [2, σχέσεις (2.3.28), (2.3.29)]). Αλλά η πιθανότητα επιβίωσης φ είναι ανεξάρτητη από τον τοκισμό r.

ISBN: 978-618-82935-0-2

Από την δομή της πιθανότητας επιβίωσης ϕ, διαπιστώνουμε ότι ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση $\frac{c}{c-\lambda b_1}\,\phi(u) = 1 + \frac{\lambda b_1}{c-\lambda b_1}\,B_0 * \phi(u)$, η οποία μέσω της μορφής $B_0 * \phi(u) = \frac{c-\lambda b_1}{\lambda b_1}\left[\frac{c}{c-\lambda b_1}\,\phi(u) - 1\right]$, επιτρέπει αντικατάσταση στην (6.5). Πράγματι, από τη σχέση (6.5) βρίσκουμε την έκφραση

$$G_r(u) = \int_0^u \left[\frac{K_r}{c-\lambda b_1}\,B_0(u-y) - \frac{r}{c-\lambda b_1}\int_0^{u-y} t\,G_r(dt)\right]\phi(dy)\,.$$

Καθώς $\psi_r(\infty) = 0$, από τον τύπο (6.2) προκύπτει ότι $G_r(\infty) = 1$, και από τη σχέση (6.4) παίρνουμε ότι ισχύει $K_r - r\,k_r(0) = c - \lambda\,b_1$, όπου χρησιμοποιήσαμε το συμβολισμό

$$k_r(u) := \int_u^\infty t\,G_r(dt)\,.$$

Τώρα μπορούμε να εκτιμήσουμε την συνάρτηση $k_r(u)$. Ο στόχος είναι να καταλήξουμε σε διπλά φράγματα που μπορούν να μας οδηγήσουν σε ασυμπτωτικά ακριβείς σχέσεις.

Λήμμα 4. *Στο κλασικό μοντέλο κινδύνου $(\lambda,\,c,\,B)$ με σταθερό ρυθμό τοκισμού $r > 0$, εάν ισχύει το Αξίωμα Καθαρού Κέρδους $\rho > 0$, τότε $k_*(u) \le k_r(u) \le k^*(u)$, όπου*

$$\begin{aligned} k_*(u) &= \frac{1}{1+c/(ru)}\left(\frac{\lambda\,b_1 + K_r}{r}\right)\overline{B}_0(u)\,, \\ k^*(u) &= \frac{c-\lambda\,b_1}{\lambda\,b_1}\left(\frac{\lambda\,b_1 + K_r}{r}\right)\frac{\psi(u)}{\phi(u)}\,. \end{aligned}$$

Πρόταση 1. *Στο κλασικό μοντέλο κινδύνου με σταθερό ρυθμό τοκισμού $r > 0$, εάν ισχύει το Αξίωμα Καθαρού Κέρδους $\rho > 0$ και $\overline{B}_0 \in \mathcal{S}$, τότε $k_r(u) \sim \frac{\lambda b_1 + K_r}{r}\,\overline{B}_0(u)$, καθώς $u \to \infty$.*

7 Υποκλάσεις της υποεκθετικής.

Τώρα εισάγουμε μια ενδιαφέρουσα κλάση κατανομών.

Ορισμός 4. *Θα λέμε ότι η ουρά κατανομής $\overline{B}$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}$, εάν ισχύει $N^B(v) =: \limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{B}(vx)}{\overline{B}(x)} < 1$, για κάθε $v > 1$. Παραπέρα ορίζουμε την κλάση κατανομών $\mathcal{A} = \mathcal{S} \cap \mathcal{E}_{\mathcal{R}}$.*

Ας δούμε μερικές ιδιότητες της κλάσης
E_R. Λήμμα 5. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

I_1. Ισχύει η

$$N^{B_0}(v) < 1, \tag{7.1}$$

για κάποιο $v > 1$.

I_2. *Ο ρυθμός επικινδυνότητας* $\lambda_0(x) = \frac{\overline{B}(x)}{b_1\,\overline{B}_0(x)}$, *ικανοποιεί τη σχέση* $\liminf_{x\to\infty} x\lambda_0(x) > 0$

I_3. *Η (7.1) ισχύει για κάθε* $v > 1$, *δηλαδή* $\overline{B}_0 \in \mathcal{E}_{\mathcal{R}}$.

.

Τώρα θα μελετήσουμε τη συνάρτηση

$$L_B(x) := 1 - \frac{x}{\overline{B}(x)} \int_x^\infty \overline{B}(z)\frac{dz}{z^2}\,,$$

για κάθε $x \geq 0$, και θεωρούμε ότι για κάποιο $v > 1$ ισχύει η συνθήκη (7.1). Από το Λήμμα 5 παίρνουμε ότι ισχύει η (7.1) για κάθε $v > 1$. Επομένως, για κάθε $v > 1$, υπάρχει κάποιο αρκετά μεγάλο $l_B(v) < \infty$ τέτοιο ώστε να ισχύει $d_B(v) := \sup_{x>l_B(v)} \frac{\overline{B}(vx)}{\overline{B}(x)} < 1$. Χάριν πληρότητας γράφουμε $d_B(1) = 1$. Με τα v, $l_B(v)$ και $d_B(v)$ όπως δίνονται παραπάνω εισάγουμε $d_B(v,k) := \sup_{x>l_B(v)} \frac{\overline{B}(v^k x)}{\overline{B}(x)}$

$$\sigma_B(v) \;\; := \;\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(v,k-1) - d(v,k)}{v^k}\,.$$

Προφανώς έχουμε $d_B(v,0) = d_B(1) = 1$ και $d_B(v,1) = d_B(v) < 1$.

Λήμμα 6. *Εάν* $\overline{B} \in \mathcal{E}_{\mathcal{R}}$, *τότε για κάθε* $v > 1$ *υπάρχει κάποιο* $l_B(v) > 0$, *τέτοιο ώστε να ισχύει* $L_B(x) \geq \sigma_B(v) \geq \frac{1-d_B(v)}{v} > 0$, *για κάθε* $x \geq l_B(v)$.

Λήμμα 7. $\overline{B}_0 \in \mathcal{E}_{\mathcal{R}}$ *εάν και μόνο εάν ισχύει* $\liminf_{x\to\infty} L_{B_0}(x) > 0$.

Θεώρημα 3. *Στο κλασικό μοντέλο κινδύνου με σταθερό ρυθμό τοκισμού* $r > 0$, *εάν ισχύει* $\overline{B}_0 \in \mathcal{A}$ *τότε*

$$\psi_r(u) \sim \frac{\lambda\, b_1}{r} \int_u^\infty \frac{B_0(dz)}{z} = \lambda \int_0^\infty \overline{B}(u\, e^{rs})\, ds\,,$$

καθώς $u \to \infty$.

8 Συμπέρασμα

Το ηθικό ζήτημα στην υπονόμευση της επενδυτικής λειτουργίας, σχετίζεται με μια ωφελιμιστική προσέγγιση από μέρους των υπερδανεισμένων που παίρνει την τάση να γίνει κυρίαρχη πεποίθηση της κοινωνίας, με το κάλυμμα του ίδιου κατεστημένου ηθικού πλαισίου αντιλήψεων. Η ωφελιμιστική βάση του αιτήματος είναι και η αιτία της ανεπάρκειάς του. Η υλιστική προσέγγιση των κοινωνικών συγκρούσεων σε καμία περίπτωση δεν οδηγεί σε μια ωφελιμιστική προσέγγιση. Αντίθετα η ωφελιμιστική προσέγγιση αναιρεί την υπόσταση του επιχειρήματος.

ISBN: 978-618-82935-0-2

Βιβλιογραφικές αναφορές

1. . Γ. Κωνσταντινίδης (2009), *Θεωρία Στοχαστικών Διαδικασιών*, Μέρος Α, εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα.

2. ——————— (2011), *Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου*, Μέρος Α, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

3. D. G. Konstantinides (2018), *Risk Theory: A Heavy Tail Approach*, World Scientific, Singapore.

4. B. Sundt and J. Teugels (1995), ”Ruin Estimates under Interest Force”, *Insurance: Math. Econom.* **16** , pp. 7–22.