



Τόμος Πρακτικών Φιλοσοφικού Forum «Ανάδρασις»
ISBN: 978-618-82935-0-2



ΔΙΕΘΝΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΤΑΙΡΙΑ
ΑΡΧΑΙΑΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ

ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ ΧΟΡΔΩΝ ΜΕ ΑΦΟΡΜΗ
ΤΟΥΣ ΧΑΛΚΟΥΡΓΟΥΣ
ΣΤΗ ΒΑΣΑΝΟ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

Καθηγητής Τμήματος Μουσικών Σπουδών

Φιλοσοφικής Σχολής

Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών &

Κοσμήτωρ της Διεθνούς Επιστημονικής Εταιρείας

της Αρχαίας Ελληνικής Φιλοσοφίας

hspyridis@music.uoa.gr

<http://users.uoa.gr/~hspyridis>

Ο Ιάμβλιχος¹ στο έργο του «Περί Πυθαγορικού βίου (*De vita Pythagorica*, κεφ. 26, §115-118)» αναφέρει ένα πείραμα ακουστικής με

¹ Ο νεοπλατωνικός φιλόσοφος Ιάμβλιχος ήτο αραβικής καταγωγής. Εγεννήθη περί το 250 μ.Χ. εις την πόλιν Χαλκίδα της Κοίλης Συρίας. Η πόλις Χαλκίς της Κοίλης Συρίας ευρίσκετο εις τους πρόποδες του όρους Λιβάνου και δια τούτο εκαλείτο Χαλκίς η υπό τον Λίβανον. Ακριβέστερον, ευρίσκετο μεταξύ Βηρυττού και Δαμασκού, ως επίσης μεταξύ Σιδώνος και Ηλιουπόλεως. Τυγχάνει ευρύτερα γνωστός λόγω του έργου του αναφορικός με την πυθαγόρειον φιλοσοφίαν εις μίαν περίοδον μεγάλων ζυμώσεων, κατά την οποία ένας πολιτισμικός κύκλος πλησιάζει εις το τέλος του και ένας καινούργιος ανοίγει. Κατ' αυτήν την μεταβατικήν περίοδον εμφανίζεται το φιλοσοφικόν ρεύμα των νεοπλατωνικών, οίτινες ειργάσθησαν στοχεύοντες εις την σύνθεσιν των διδασκαλιών του Πυθαγόρου, του Πλάτωνος, του Αριστοτέλους και των Μυστηρίων εις έν ενιαίον σύστημα, αναζωογονούντες την ψυχήν του ελληνορωμαϊκού κόσμου, του ταχέως βυθιζομένου εις την πνευματικήν και την ηθικήν παρακμήν. Ήτο γόνος πλουσίας και αριστοκρατικής οικογενείας της Χαλκίδος καταγομένης από βασιλείς – ιερείς του θεού του Ηλίου *Ηλιογαβάλου*. Υπερήφανος ών για την εθνικήν του καταγωγήν, ηρνήθη να υιοθετήσει ελληνικόν ή λατινικόν όνομα, κατά τα ειωθότα της εποχής και διετήρησεν το συριακόν *Για-μλικού*, «ο θεός κυβερνά». Υπήρξεν μαθητής του Πλωτίνου επηρεασθείς υπό των μυστικιστικών αντιλήψεών του. Αμφισβητείται η μαθητεία του παρά τον Πορφύριον, μετά του οποίου είχαν ουκ ολίγες διαφωνίες. Ίδρυσεν ιδικήν του σχολήν εις την Συρίαν, ένθα η φήμη του προσήλκυσεν πλήθος μαθητών εξ όλων των ανατολικών επαρχιών της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας. Εξέχοντες μαθητές αυτού ήσαν ο Σώπατρος ο Απαμεύς και ο Αιδέσιος, όστις τον διεδέχθη εις την Διεύθυνσιν της Συριακής Σχολής. Ο επιφανέστερος συνεχιστής της Ιαμβλιχείου φιλοσοφίας υπήρξεν ο Πρόκλος, εις των τελευταίων Διευθυντών της Ακαδημίας του Πλάτωνος. Ο Ιάμβλιχος πιθανώς να απεβίωσεν ολίγον

χορδές, που φέρεται ότι πραγματοποίησε ο Πυθαγόρας και δια του οποίου χρεώνεται σ' αυτόν προσωπικά η τιμή της ανακάλυψης των αριθμητικών λόγων των μουσικών συμφωνιών διαπασών (οκτάβας) (2/1), δια πέντε (πέμπτης) (3/2), δια τεσσάρων (τετάρτη) (4/3) και επόγδοον (τόνος) (9/8).

Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (*Αρμονικόν Εγχειρίδιον*, κεφ. 6, §Τ, γρμ. 1 κ.εξ.) εξιστορών και αυτός το ίδιο πείραμα προσθέτει - και αυτό είναι βασικότατο - ότι τα συμπεράσματά του εξ αυτού του πειράματος ο Πυθαγόρας τα εφάρμοσε σε ηχητικά βάζα περιέχοντα συγκεκριμένους όγκους νερού (*λεκίδων κροῦσιν*), σε καμπάνες, σε ηχητικούς σωλήνες με καλαμίδα (*αύλους*), σε ηχητικούς σωλήνες χωρίς καλαμίδα (*σύριγγας*) καθώς επίσης σε πλήθος εγχόρδων μουσικών οργάνων (*τρίγωνα και τὰ παραπλήσια*).

Υπάρχει ένας ισχυρισμός του Θέωνα του Σμυρναίου² (*Περί των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν*, σελίς 59, στίχος 11 – σελίς 60, στίχος 11) ότι άλλοι Πυθαγόρειοι θέλουν να υπολογίζουν τις

μετά την Α΄ Οικουμενική Σύνοδο και ολίγον πριν ο χριστιανισμός γίνει η επίσημη θρησκεία της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας. Έργα του Ιάμβλιχου είναι: Η «Χαλδαϊκή Θεολογία» εκ της οποίας διασώζονται έξι βιβλία: *Περί του πυθαγορικού βίου, Προτρεπτικός επί φιλοσοφίαν, Περί της κοινής μαθηματικής, Περί της Νικομάχου Γερασηνού Αριθμητικής Εισαγωγής, Τα θεολογούμενα αριθμητικά και Περί των Αιγυπτίων Μυστηρίων*. Σώζονται επίσης εις το Ανθολόγιον του Στοβαίου εκτεταμένα αποπάσματα από το έργον του *Περί Ψυχής*, από το *Επιστολαί προς Μακεδόنيον και Σώπατρον* «*Περί ειμαρμένης*» και από το *Προς Δέξιππον και Σώπατρον* το «*Περί διαλεκτικής*».

² «ἐν ἀριθμοῖς ἡγούμενος λόγους τοιοῦτους ἐλάμβανεν ἐπ' ἀγγείων. ἴσων γὰρ ὄντων καὶ ὁμοίων πάντων τῶν ἀγγείων τὸ μὲν κενὸν ἔασας, τὸ δὲ ἡμισυ ὕγρου <πληρώσας> ἐνόμφει ἑκατέρωφ, καὶ αὐτῶ ἢ διὰ πασῶν ἀπεδίδοτο συμφωνία· θάτερον δὲ πάλιν τῶν ἀγγείων κενὸν ἔων εἰς θάτερον τῶν τεσσάρων μερῶν τὸ ἐν ἐνέχεε, καὶ κρούσαντι αὐτῶ ἢ διὰ τεσσάρων συμφωνία ἀπεδίδοτο, ἢ δὲ διὰ πέντε, <ὅτε> ἐν μέρος τῶν τριῶν συνεπλήρου, οὔσης τῆς κενώσεως πρὸς τὴν ἑτέραν ἐν μὲν τῇ διὰ πασῶν ὡς β πρὸς ἔν, ἐν δὲ τῷ διὰ πέντε ὡς γ πρὸς β, ἐν δὲ τῷ διὰ τεσσάρων ὡς δ πρὸς γ. οἷς ὁμοίως καὶ κατὰ τὰς διαλήψεις τῶν χορδῶν θεωρεῖται, ὡς προεῖρηται, ἀλλ' οὐκ ἐπὶ μιᾶς χορδῆς, ὡς ἐπὶ τοῦ κανόνος, ἀλλ' ἐπὶ δυεῖν· δύο γὰρ ποιήσας ὁμοτόνους ὅτε μὲν τὴν μίαν αὐτῶν διαλάβοι μέσην πίεσας, τὸ ἡμισυ πρὸς τὴν ἑτέραν συμφωνίαν τὴν διὰ πασῶν ἐποίει· ὅτε δὲ τὸ τρίτον μέρος ἀπολαμβάνοι, τὰ λοιπὰ μέρη πρὸς τὴν ἑτέραν τὴν διὰ πέντε συμφωνίαν ἐποίει· ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῆς διὰ τεσσάρων· καὶ γὰρ ἐπὶ ταύτης μιᾶς τῶν χορδῶν ἀπολαβὸν τὸ τέταρτον μέρος τὰ λοιπὰ μέρη πρὸς τὴν ἑτέραν συνῆπτεν. ὃ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς σύριγγος ἐποίει κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον. οἱ δ' ἀπὸ τῶν βαρῶν τὰς συμφωνίας ἐλάμβανον, ἀπὸ δυεῖν χορδῶν ἐξαρτῶντες βάρη κατὰ τοὺς εἰρημένους λόγους, οἱ δ' ἀπὸ τῶν μικρῶν, καὶ τῶν χορδῶν ἐπίεσαν, τὰς συμφωνίας ἐν ταῖς χορδαῖς ἀποφαινόμενοι». Θέων ο Σμυρναῖος: *Περί των κατά το μαθηματικόν χρησίμων, εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν*, σελίς 59, στίχος 11 – σελίς 60, στίχος 11.

αριθμητικές σχέσεις των συμφωνιών με βάρη, άλλοι με μεγέθη, άλλοι με την κίνηση και άλλοι με τα δοχεία.

Σε πηγές των τελευταίων χρόνων της αρχαιότητας αποδίδονται στον Πυθαγόρα ακουστικές παρατηρήσεις και ακουστικά πειράματα, όπως π.χ. είναι το πείραμα με τα σφυριά των σιδεράδων και τις χορδές, που αναφέρει ο Ιάμβλιχος στο έργο του «*Πυθαγορικός Βίος*» το οποίο θα εξετάσουμε εάν είναι λανθασμένο ή όχι από την σκοπιά της Φυσικής.³

Το εξώφυλλο του βιβλίου του F. Gafurio με τίτλο *Theorica Musicae*



(1492) κοσμεί μία ξυλογραφία που παριστάνει τα πειράματα τα αποδιδόμενα στον Πυθαγόρα, δηλαδή το πείραμα στο Χαλκοτυπείο με τα σφυριά, το πείραμα με τις καμπάνες, το πείραμα με τους ποικίλους ηχητικούς σωλήνες και το πείραμα με τις χορδές σε πολύχορδο μουσικό όργανο.

Από το εξώφυλλο του βιβλίου του F. Gafurio, *Theorica Musicae* (1492). Ξυλογραφία που παριστάνει πειράματα του Πυθαγόρα (το πείραμα στο Χαλκοτυπείο με τα σφυριά, πείραμα με καμπάνες, πείραμα με ηχητικούς σωλήνες, πείραμα με χορδές σε πολύχορδο μουσικό όργανο πείραμα με αυλούς και σύριγγες). Οι αριθμοί 16, 12, 9, 8, 6, 4 στη γκραβούρα των Πυθαγορείων πειραμάτων οι αναφερόμενοι είτε στα μήκη των ανοικτών ηχητικών σωλήνων, είτε στις τάσεις των χορδών, είτε στο κενό μέρος των ποτηριών, είτε στις μάζες των καμπανών εστόχευαν από τους εμπνευστές αυτών των πειραμάτων στο να αναφέρονται κατά μεν την κατιούσα διαδοχή στις νότες A₂, E₂, B₁, A₁, E₁, A₀ κατά δε τη ανιούσα διαδοχή στις νότες E₀, A₀, D₁, E₁, A₁, E₂.

Όσον αφορά στο πείραμα των χορδών, ο Ιάμβλιχος συγκεκριμένα αναφέρει: «Ἐν φροντίδι ποτὲ καὶ διαλογισμῶ συντεταμένῳ ὑπάρχων, εἰ ἄρα δύναίτο τῇ ἀκοῇ βοήθειάν τινα ὀργανικὴν ἐπινοῆσαι, παγίαν καὶ ἀπαραλόγιστον, οἷαν ἢ μὲν ὄψις διὰ τοῦ διαβήτου καὶ διὰ τοῦ κανόνος ἢ

³ (Βλέπε C. Janus, *Musici scriptores graeci*, σελ. 341, 13 και εξής και B. L. v. d. Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, σελ. 157).

νή Δία διὰ διόπτρας ἔσχεν, ἢ δ' ἀφή διὰ τοῦ ζυγοῦ ἢ διὰ τῆς τῶν μέτρων ἐπινοίας, παρά τι χαλκοτυπεῖον περιπατῶν ἕκ τινος δαιμονίου συντυχίας ἐπήκουσε ραιστήρων⁴ σίδηρον ἐπ' ἄκμονι ραιόντων καὶ τοὺς ἤχους παραμιξὶ πρὸς ἀλλήλους 'συμφωνοτάτους' ἀποδιδόντων, πλὴν μιᾶς συζυγίας. ἐπεγίνωσκε δ' ἐν αὐτοῖς τὴν τε διὰ πασῶν τὴν τε διὰ πέντε καὶ τὴν διὰ τεσσάρων συνφδίαν, τὴν δὲ μεταξύτητα τῆς τε διὰ τεσσάρων καὶ τῆς διὰ πέντε ἀσύμφωνον μὲν ἑώρα αὐτὴν καθ' ἑαυτήν, συμπληρωτικὴν δὲ ἄλλως τῆς ἐν αὐτοῖς μειζονότητος. ἄσμενος δὴ ὡς κατὰ θεὸν ἀνυομένης αὐτῷ τῆς προθέσεως εἰσέδραμεν εἰς τὸ χαλκεῖον, καὶ ποικίλαις πείραις παρὰ τῶν ἐν τοῖς ραιστήρσιν ὄγκων εὐρῶν τὴν διαφορὰν τοῦ ἤχου, ἀλλ' οὐ παρὰ τὴν τῶν ραιόντων βίαν⁵ οὐδὲ παρὰ τὰ σχήματα τῶν σφυρῶν οὐδὲ παρὰ τὴν τοῦ ἐλαυνομένου σιδήρου μετάθεσιν, σηκώματα ἀκριβῶς ἐκλαβὼν καὶ ῥοπὰς ἰσαιτάτας τῶν ραιστήρων πρὸς ἑαυτὸν ἀπηλλάγη, καὶ ἀπὸ τινος ἐνὸς πασσάλου διὰ γωνίας ἐμπεπηγὸτος τοῖς τοίχοις, ἵνα μὴ κάκ τούτου διαφορὰ τις ὑποφαίνεται ἢ ὄλως ὑπονοῖται πασσάλων ἰδιαζόντων παραλλαγῆ, ἀπαρτίσας τέσσαρας χορδὰς ὁμοῦλους καὶ ἰσοκώλους, ἰσοπαχεῖς τε καὶ ἰσοστρόφους, ἐκάστην ἀφ' ἐκάστης ἐξήρτησεν, ὀλκὴν προσδήσας ἐκ τοῦ κάτωθεν μέρους, τὰ δὲ μήκη τῶν χορδῶν μηχανησάμενος ἐκ παντὸς ἰσαιτάτα. εἶτα κρούων ἀνὰ δύο ἅμα χορδὰς ἐπαλλάξ συμφωνίας εὔρισκε τὰς προλεχθείσας, ἄλλην ἐν ἄλλῃ συζυγία. τὴν μὲν γὰρ ὑπὸ τοῦ μεγίστου

⁴ **Ραιστήρ** = σφύρα, κατὰ τον Ησύχιον σφύρα σιδηρὰ μονοκέφαλος.

Ραιστηροκοπία = το σφυρηλατεῖν

Σήκωμα, Δωρ. Σάκωμα = τὸ βάρος ἐν τῇ πλάστιγγι

Ροπή = κλίσις τῆς πλάστιγγος πρὸς τὰ κάτω (ρους, σους)

Κῶλον = μέλος παντός πράγματος

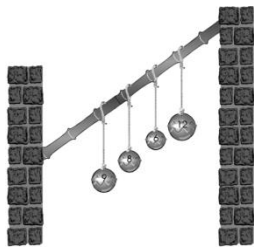
Βατήρ = ἐν λύρα τὸ κατώτερον μέρος, ἐνθα αἱ χορδαὶ ἐντείνονται, κόλλοψ, στρόφιγξ ἢ κλειδίον, ὠσαύτως χορδότονον (Νικόμαχ. Αρμ.)

Λεκίς – ἴδος = παροψίς – ἴδος, πινάκιον ἐφ' οὗ τοιαῦτα ἐδέσματα – τιθέμενα παρὰ τὸ σύνηθες φαγητὸν – προσφέρονται. Θα ἔλεγα μὲν γλυκοῦ κατὰ τὴν σημερινὴν ορολογίαν.

Συζυγία = σύνδεσμος λέξεων ἢ πραγμάτων κατὰ ζεύγη.

⁵ Θα ἐννοοῦσε ὁ Πυθαγόρας τὰ βάρη τῶν σφυριῶν. Ἀλλὰ ἡ σχέση τῶν ὄγκων ἐν συμπηγῇ, ὁμογενῇ καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ υλικοῦ σώματα ἀνάγεται ἐν σχέσῃ βαρῶν.

έξαρτήματος τεινομένην πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ μικροτάτου διὰ πασῶν φθεγγομένην κατελάμβανεν· ἦν δὲ ἡ μὲν δώδεκα τινῶν ὀλκῶν, ἡ δὲ ἕξ, ἐν διπλασίῳ δὴ λόγῳ ἀπέφαινε τὴν διὰ πασῶν, ὅπερ καὶ αὐτὰ τὰ βάρη ὑπέφαινε. τὴν δ' αὖ μείστην πρὸς τὴν παρὰ τὴν μικροτάτην, οὕσαν ὀκτῶ ὀλκῶν, διὰ πέντε συμφωνοῦσαν, ἔνθεν ταύτην ἀπέφαιναν ἐν ἡμιολίῳ λόγῳ, ἐν ᾧ περ καὶ αἱ ὀλκαὶ ὑπῆρχον πρὸς ἀλλήλας· πρὸς δὲ τὴν μεθ' ἑαυτὴν μὲν τῷ βάρει, τῶν δὲ λοιπῶν μείζονα, ἐννέα σταθμῶν ὑπάρχουσιν, τὴν διὰ τεσσάρων, ἀναλόγως τοῖς βρίθεσι. καὶ ταύτην δὴ ἐπιτίριον ἄντικρυς κατελαμβάνετο, ἡμιολίαν τὴν αὐτὴν φύσει ὑπάρχουσιν τῆς μικροτάτης (τὰ γὰρ ἐννέα πρὸς τὰ ἕξ οὕτως ἔχει)· ὄνπερ τρόπον ἢ παρὰ τὴν μικρὰν ἢ ὀκτῶ πρὸς μὲν τὴν τὰ ἕξ ἔχουσιν ἐν ἐπιτίριῳ λόγῳ ἦν, πρὸς δὲ τὴν τὰ δώδεκα ἐν ἡμιολίῳ. τὸ ἄρα μεταξὺ τῆς διὰ πέντε καὶ τῆς διὰ τεσσάρων, ᾧ ὑπερέχει ἢ διὰ πέντε τῆς διὰ τεσσάρων, ἐβεβαιοῦτο ἐν ἐπογδόῳ λόγῳ ὑπάρχειν, ἐν ᾧ περ τὰ ἐννέα πρὸς τὰ ὀκτῶ, ἑκατέρως τε ἢ διὰ πασῶν σύστημα ἠλέγχετο, ἥτοι τῆς διὰ πέντε καὶ διὰ τεσσάρων ἐν συναφῇ, ὡς ὁ διπλάσιος λόγος ἡμιολίου τε καὶ ἐπιτίριου, οἷον δώδεκα, ὀκτῶ, ἕξ, ἢ ἀναστροφῶς τῆς διὰ τεσσάρων καὶ τῆς διὰ πέντε, ὡς τὸ διπλάσιον ἐπιτίριου τε καὶ ἡμιολίου, οἷον δώδεκα, ἐννέα, ἕξ, ἐν τάξει τοιαύτη διὰ πασῶν.»



Το πείραμα του Πυθαγόρα, που αναφέρει ο Ιάμβλιχος.

Κυρίες και κύριοι, με τις λακωνικές πληροφορίες για την αρχαία ελληνική μουσική και τη Μουσική Ακουστική, που θα σας παραθέσω, ευελπιστώ να σας καταστήσω στοιχειωδώς μύστες, ώστε να μπορέσετε να κατανοήσετε τα όσα θα σας αναφέρω στην εισήγησή μου.

Η έννοια μουσικό «διάστημα»

Στην αρχαιότητα η έννοια μουσικό διάστημα ορίζετο με τη βοήθεια δύο αριθμών λ.χ. α , β ($\alpha > \beta$). Ο κάθε αριθμός παριστούσε τη θέση πατήματος του δακτύλου του μουσικού εκτελεστού επί του κανόνος (=μάνικου) του εγγόρδου μουσικού οργάνου. Το ερώτημα είναι βάσει ποιάς αριθμητικής πράξεως συνεδέοντο μεταξύ των αυτοί οι δύο αριθμοί προκειμένου να καθορίσουν το μουσικό διάστημα;

Οι αριθμητικές πράξεις ανέκαθεν ήσαν

1. η αφαίρεση, δια της οποίας αντιμετωπίζετο το μουσικό διάστημα ως η απόσταση μεταξύ των δύο πατημάτων κατά τρόπον γραμμικόν $(\alpha - \beta)$,⁶
2. η διαίρεση δια της οποίας αντιμετωπίζετο το μουσικό διάστημα ως λόγος αριθμών $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.⁷

Η αντιπαράθεση δε των δύο ανωτέρω απόψεων, των Αριστοξενείων και των Πυθαγορείων έγκειται εις το εξής:

«Έν γάρ τούτοις τὸν λόγον τῶν ὄρων διάστημα κέκληκεν, οὐ τὴν ὑπεροχὴν. οἱ δ' Ἀριστοξένειοί φασιν τὰ τῶν διαστημάτων μεγέθη λέγεσθαι κατὰ τὴν ἀπόστασιν τῶν ὀξυτάτων καὶ βαρυτάτων, οὐ κατὰ τὴν τοῦ μείζονος πρὸς τὸ ἔλαττον ὑπεροχὴν.» Πορφύριος, *Υπόμνημα εις τα Αρμονικά του Πτολεμαίου*.

⁶ «τὸ γὰρ μεταξὺ δυοῖν τινων θέσεων διαφερόντων τῶ τὸ μὲν ἐνθάδε, τὸ δ' ἐνθάδε κείσθαι λέγεται διάστημα, ὃ καὶ ὀριζόμενοι φασιν εἶναι γραμμῆς χώραν, ὡσανεὶ γὰρ τόπος τῆς μεταξὺ καὶ εὐθείας οὕτως ἐπινόηται.» (Πορφύριος, *Υπόμνημα εις τα Αρμονικά του Πτολεμαίου*)
«διάστημα δ' ἐστὶ τὸ ὑπὸ δύο φθόγγων ὀρισμένον μὴ τὴν αὐτὴν τάσιν ἔχόντων.» (Αριστόξενος, *Στοιχεῖα Αρμονικά*, σελ. 20).

⁷ «Γράφει δὲ καὶ Ἡρακλείδης περὶ τούτων ἐν τῇ Μουσικῇ εἰσαγωγῇ ταῦτα· Πυθαγόρας, ὡς φησι Ξενοκράτης, εὔρισκε καὶ τὰ ἐν μουσικῇ διαστήματα οὐ χωρὶς ἀριθμοῦ τὴν γένεσιν ἔχοντα· ἐστὶ γὰρ σύγκρισις ποσοῦ πρὸς ποσόν.» (Πορφύριος, *Υπόμνημα εις τα Αρμονικά του Πτολεμαίου*)

Για να αποφύγετε την εμπλοκή σας χωρίς να έχετε σχετική γνώση από την θεωρία της αρχαιοελληνικής μουσικής επάνω στο θέμα «τι είναι μουσικό διάστημα;» σας δίδω έναν ορισμό αυτού αποφεύγοντας την χρήση του λόγου και της διαφοράς:

«διάστημα δὲ ὁδὸν ποιᾶν ἀπὸ βαρύτητος εἰς ὀξύτητα ἢ ἀνάπαλιν»
(Νικόμαχος, *Αριθμητικόν Εγχειρίδιον*, Κεφ. 4, §1, γρμ. 4-6).

Σημειωτέον ὅτι για την λύση προβλημάτων, που αφορούν στα ποιητικά αίτια της μουσικής, ενδείκνυται η αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων μόνον δια των λόγων (Πυθαγόρειος άποψη), ενώ για την λύση προβλημάτων, που αφορούν στην αίσθηση της μουσικής, ενδείκνυται μόνον η αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων δια των διαφορών (Αριστοξένιος άποψη).

Αυτό διατυπώνεται στα τέλη του 19^{ου} αιώνα και αποτελεί τον ψυχοφυσικό νόμο των Weber – Fechner.

Εγείρεται η ερώτησις: Και προ του Αριστοξένου (4^{ος} αι. π.Χ.) δεν υπήρχε η αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων δια των διαφορών;

Απάντησις: Υπήρχε, διότι εξ αυτής πρωτοεξεκίνησαν οι Πυθαγόρειοι, αλλά μετά διεπίστωσαν ὅτι:

«Ἐρατοσθένης μὲν οὖν φησιν ἕτερον εἶναι διάστημα λόγου·» Πορφύριος,
Υπόμνημα εἰς τα Ἀρμονικά του Πτολεμαίου

Και

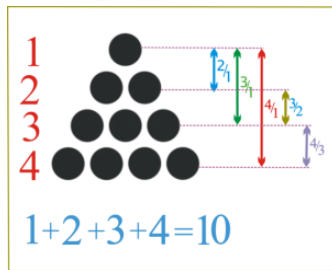
«κακῶς γὰρ οἴονται οἱ νομίζοντες διαφορὰν καὶ σχέσιν τὸ αὐτὸ εἶναι.»
Νικόμαχος, *Ἀρμονικός Εγχειρίδιον*, κεφ. 12, §1, γρμ. 12-14.

Για την αντιμετώπιση των μουσικών προβλημάτων από την σκοπιά των γενεσιουργών τους αιτίων επέλεξαν την δια των λόγων μελέτη των μουσικών διαστημάτων.

Περί της Πυθαγορείου Τετρακτύος (εκ του τέτταρα και άγω)

Ο Λουκιανός εις το έργον του *Πράσις Βίων* αναφέρει ότι η τετρακτύς γεωμετρικώς εκφράζεται δια του «τελείου τριγώνου» - του ισοπλεύρου.

Αριθμητικώς εκφράζεται δια του «τριγωνικού»⁸ αριθμού $10=1+2+3+4$ (4 κατά δύναμιν, ήτοι οι τέσσερις πρώτοι φυσικοί αριθμοί και 10 κατ' αριθμόν, ήτοι το άθροισμα των μονάδων αυτών των πρώτων τεσσάρων φυσικών αριθμών, όπως αναφέρει στην Μαθηματική του Εισαγωγή ο Νικόμαχος ο Γερασηνός).



Η τριγωνική δομή των δέκα κουκίδων της ιεράς τετρακτύος.

Όσον αφορά στην Πυθαγόρειο τετρακτύ, ο Πυθαγόρας και οι μαθηταί του την εχρησιμοποίησαν προκειμένου να διδάξουν μεταξύ των πολλών άλλων και μία *μυστική αριθμητική* με την οποίαν αφενός μεν αντιμετώπισαν, αφετέρου εδίδαξαν την επίλυση διαφόρων μουσικών θεωρητικών και πρακτικών προβλημάτων.

Εκφραζόμενοι κατά το μαθηματικότερον, θα ελέγαμε ότι, αποκωδικοποιούντες μουσικώς την τετρακτύ, ο λόγος του αριθμού των κουκίδων της *i* σειράς προς τον αριθμό των κουκίδων της *j* σειράς ($i > j$),

⁸ Οι τρίγωνοι αριθμοί προκύπτουν από το άθροισμα $1+2+3+4+\dots+n$. Έτσι, $1+2=3$ και $1+2+3=6$. «Τρίγωνος μὲν οὖν ἔστιν ἀριθμὸς ὁ διαλυόμενος εἰς μονάδας καὶ τὴν κατ' ἐπίπεδον θέσιν τῶν μορίων ἰσόπλευρον σχηματογραφῶν εἰς τριγωνισμόν, οὗ ὑποδείγματα ὁ γ, ζ, ι, ιε, κα, κη καὶ οἱ ἐφεξῆς· σχηματογραφαίαι γὰρ αὐτῶν εὐτακτοὶ ἔσονται τρίγωνοι τε ἅμα καὶ ἰσόπλευροι, καὶ τὸ τοιοῦτον, μέχρις οὗ βούλει, προκόπτων τριγωνιζόμενον εὐρήσεις πρὸ πάντων στοιχειωδέστατον τάττων τὸ ἐκ μονάδος γινόμενον, ἵνα καὶ τρίγωνος δυνάμει φαίνεται ἢ μονάδι, ἐνεργεία δὲ πρώτος ὁ γ. πλευραὶ δὲ παραυξηθήσονται τῷ συνεχεῖ ἀριθμῷ, τοῦ μὲν γὰρ δυνάμει πρώτου πλευρὰ μονάδι, τοῦ δὲ ἐνεργεία πρώτου πλευρὰ δυάς, τοῦ δὲ ἐνεργεία δευτέρου πλευρὰ τριάς, τοῦ δὲ ἐνεργεία πρώτου πλευρὰ τετράς καὶ τοῦ τετάρτου πεντάς καὶ τοῦ πέμπτου ἑξάς καὶ αἰεὶ οὕτως. γεννᾶται δὲ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ στοιχηδὸν ἐκτεθέντος καὶ αἰεὶ ἀπ' ἀρχῆς τῶν συνεχῶν κατὰ ἓνα συντιθεμένων, κατὰ γὰρ ἐκάστην σύνθεσιν καὶ προσσώρευσιν οἱ εὐτακτοὶ τρίγωνοι συντελοῦνται·», Νικόμαχος Γερασηνός, *Αριθμητικὴ Εἰσαγωγή*, 2, 8, 1, 1 – 2, 8, 3, 5.

$i=4,3,2$) της τετρακτύος εκφράζει μία μουσική Πυθαγόρειο συμφωνία. Πράγματι, 4:1 είναι ο τετραπλάσιος λόγος και εκφράζει την συμφωνία (= το εύφωνο μουσικό διάστημα) του δις διαπασών, 4:3 είναι ο επίτριτος λόγος και εκφράζει την διατεσσάρων συμφωνία ή συλλαβά, 3:2 είναι ο ημιόλιος λόγος και εκφράζει την διαπέντε συμφωνία ή διοξειά, 3:1 είναι ο τριπλάσιος λόγος και εκφράζει την διαπασών και διαπέντε συμφωνία, 2:1 είναι ο διπλάσιος λόγος και εκφράζει την διαπασών συμφωνία.

Εκ των ανωτέρω προκύπτει το *θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας των μουσικών διαστημάτων ότι **MONON** μία σχέση μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της *ιεράς τετρακτύος* (1, 2, 3, 4) οδηγεί εις εύφωνα μουσικά διαστήματα.

Πράξεις μουσικών διαστημάτων κατά τον Πυθαγόρειο ορισμό

Άθροισμα μουσικών διαστημάτων

$$\delta = \delta_1 \oplus \delta_2 = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{g_2}{g_1}$$

Για να βρούμε το άθροισμα δύο μουσικών διαστημάτων πολλαπλασιάζουμε τις αριθμητικές τους σχέσεις.

Διαφορά μουσικών διαστημάτων

$$\delta = \delta_1 \ominus \delta_2 = \frac{f_2}{f_1} : \frac{g_2}{g_1}, \text{ όπου } \frac{f_2}{f_1} > \frac{g_2}{g_1}$$

Για να βρούμε τη διαφορά δύο μουσικών διαστημάτων, που το πρώτο είναι μεγαλύτερο του δευτέρου, διαιρούμε τις αριθμητικές τους σχέσεις.

Ακέραιο πολλαπλάσιο μουσικού διαστήματος

$$\lambda \cdot \delta = \left(\frac{f_2}{f_1} \right)^\lambda$$

Για την εύρεση του πολλαπλασίου ενός μουσικού διαστήματος δ επί έναν ακέραιο αριθμό λ , αρκεί να υπολογίσουμε την λ -στή δύναμη της αριθμητικής σχέσεως του διαστήματος.

Υποπολλαπλάσιο μουσικού διαστήματος

$$\frac{\delta}{\lambda} = \sqrt[\lambda]{\frac{f_2}{f_1}} = \left(\sqrt[\lambda]{f_2} / \sqrt[\lambda]{f_1} \right)$$

Το υποπολλαπλάσιο ενός μουσικού διαστήματος δ διά του ακέραιου αριθμού λ υπολογίζεται με τη βοήθεια της λ -στής τάξεως ρίζης της αριθμητικής σχέσεως του εν λόγω διαστήματος.

Πυθαγόρειες Μεσότητες

Δοθέντων δύο μη διαδοχικών φυσικών (=ακεραίων θετικών) αριθμών α , γ ($\alpha > \gamma$) μεσότητα αυτών είναι ένας ενδιάμεσος ακέραιος αριθμός, ο οποίος με τους δύο ακραίους δομεί μία κάποια ισότητα δύο λόγων. Την ισότητα δύο λόγων οι Πυθαγόρειοι ωνόμαζαν αναλογία και είχαν προσδιορίσει δέκα διαφορετικές αναλογίες. Εκάστη αναλογία είχε τον δικό της μέσον ή μεσότητα. Άρα οι Πυθαγόρειοι είχαν ορίσει δέκα μεσότητες.

Τρεις αναλογίες,

- η Αριθμητική,
- η Γεωμετρική και
- η Αρμονική (ή Υπενάντιος),

ήσαν γνωστές στους πιο αρχαίους Μαθηματικούς και οι οποίες παρουσιάστηκαν στη φιλοσοφία του Πυθαγόρου (580-490 π.Χ.), του Πλάτωνος (427-347 π.Χ.) και του Αριστοτέλους (384-322 π.Χ.). Αυτές οι τρεις μεσότητες σύμφωνα με τον *Ιάμβλιχο* (346-414 μ.Χ.) χρησιμοποιήθηκαν από τον *Πλάτωνα* μέχρι τον *Ερατοσθένη* (276-194 π.Χ.).

«μόναι δὲ τὸ παλαιὸν τρεῖς ἦσαν μεσότητες ἐπὶ Πυθαγόρου καὶ τῶν κατ' αὐτὸν μαθηματικῶν, ἀριθμητικὴ τε καὶ ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ ποτὲ μὲν ὑπεναντία λεγομένη τῇ τάξει τρίτη, ὑπὸ δὲ τῶν περὶ Ἀρχύταν αὐθις καὶ Ἴππασον ἀρμονικὴ μετακληθεῖσα ὅτι τοὺς κατὰ τὸ ἡρμωσμένον καὶ ἐμμελὲς ἐφαίνετο λόγους περιέχουσα».⁹

Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός υπογραμμίζει ότι οι τρεις αυτές πρώτες αναλογίες πήραν τα ονόματά τους από τις τρεις πρώτες επιστήμες, δηλαδή

- την Αριθμητική,
- τη Γεωμετρία και
- την Αρμονική (=Μουσική).

Στην Αριθμητική αναλογία $\alpha - \beta = \beta - \gamma$ ($\alpha > \beta > \gamma$) ο αριθμητικός μέσος εκφράζεται συναρτήσει των δύο άκρων αριθμών ως $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

Στη Γεωμετρική αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ ($\alpha > \beta > \gamma$) ο γεωμετρικός μέσος εκφράζεται συναρτήσει των δύο άκρων αριθμών ως $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$.

⁹ «Παλιά κατά την εποχή του Πυθαγόρου και των μαθηματικών του υπήρχαν τρεις μεσότητες, η αριθμητική, η γεωμετρική και η τρίτη που ονομάζετο υπεναντία. Από δε τον Αρχύτα, τον Ίππασο και τους μαθητές τους ονομάστηκε αρμονική, διότι φαίνεται ότι περιέχει τους μουσικούς αρμονικούς λόγους».

Στην αρμονική αναλογία $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$ ($\alpha > \beta > \gamma$) ο αρμονικός μέσος

εκφράζεται συναρτήσει των δύο άκρων αριθμών ως $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}$.

Παρεμβάλλοντας μεταξύ των αριθμών 1 και 2, οι οποίοι προσδιορίζουν το διάστημα της οκτάβας (=αρμονίας), τον αριθμητικό και τον αρμονικό τους μέσον, προκύπτει η λεγομένη «μουσική αναλογία» ή «Κύβος» ή «Γεωμετρική Αρμονία» (Νικόμαχος, *Αρμ. Εγχειρ.*, 12, 26, 2) 6, 8, 9, 12.

Ο αριθμητικός μέσος των 1 και 2 είναι ο $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$, ενώ ο

αρμονικός μέσος των 1 και 2 είναι ο $\beta = \frac{2 \cdot \alpha \cdot \gamma}{\alpha + \gamma} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2+1} = \frac{4}{3}$.

Δια της διαδικασίας της ακεραιοποίησης των τεσσάρων αριθμών προκύπτει η «μουσική αναλογία» ή η κατά τον Αριστοτέλη «καλλίστη αναλογία»:

$(1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2)$ Ε.Κ.Π = 6 → **6, 8, 9, 12**



Τα δομούμενα μουσικά διαστήματα μεταξύ των αριθμών της μουσικής αναλογίας ή της καλλίστης αναλογίας.

Περί Χορδών

Στην Ακουστική χορδή καλείται ένα επίμηκες κυλινδρικό και ελαστικό στερεό σώμα, που έχει μικρή διάμετρο σε σχέση με το μήκος του και κατά τα δύο του άκρα είναι ακλόνητα στερεωμένο και καλά τεντωμένο.

Οι χορδές που χρησιμοποιούνται στη Μουσική ή είναι ζωϊκής προελεύσεως (από έντερο ή νήμα μετάξης) ή είναι μεταλλικές ή είναι πλαστικές. Οι χορδές αναγκάζονται από τον μουσικό να εκτελέσουν

εγκάρσιες ταλαντώσεις είτε με ελαφρό κτύπημα (όπως είναι στο πιάνο), είτε τρίβοντας επάνω τους το δοξάρι (όπως είναι στο βιολοντσέλλο), είτε με νύξη (=τσίμπημα) (όπως είναι το κανονάκι).

Εάν απομακρύνουμε ένα σημείο της χορδής από τη θέση της ισορροπίας του, τότε αυτό εξ αιτίας των ελαστικών δυνάμεων που επιδρούν επάνω του θα τείνει να επανέλθει στη θέση της ισορροπίας του. Έτσι, λοιπόν, το σημείο εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις. Επάνω στη χορδή διαδίδονται με αντίθετη φορά κινήσεως δύο εγκάρσια κύματα, τα οποία ανακλώνται στα σημεία που η χορδή είναι πακτωμένη (=στερεωμένη ακλόνητα). Με κατάλληλη τάση (τέντωμα) της χορδής τα δύο αυτά κύματα συμβάλλουν και σχηματίζουν στάσιμα εγκάρσια κύματα.

Στα στάσιμα αυτά κύματα τα δύο ακλόνητα άκρα της χορδής είναι πάντοτε δεσμοί.

Η παλλόμενη χορδή κτυπάει τον αέρα και παράγει ήχο που έχει συχνότητα $f = \frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ $k \in N$, όπου F είναι η δύναμη με την οποία

τεντώνουμε τη χορδή, μ είναι η γραμμική πυκνότητα της χορδής, δηλαδή η μάζα της ανά μονάδα μήκους και L είναι το μήκος της χορδής. Το k φανερώνει την τάξη του παραγομένου από την χορδή αρμονικού.

Νόμοι των χορδών

Σχολιάζοντας την παραπάνω σχέση, έχουμε να παρατηρήσουμε ότι η συχνότητα του θεμελίου ήχου, ο οποίος παράγεται από μια χορδή, είναι:

1. αντιστρόφως ανάλογη του μήκους της χορδής (γι' αυτό όσο πιο κοντή η χορδή, τόσο πιο οξύς είναι ο παραγόμενος ήχος),¹⁰

¹⁰ Αυτό το ε γνώριζαν οι Πυθαγόρειοι.

2. ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της δύναμης με την οποία τεντώνουμε τη χορδή (γι' αυτό με τέντωμα το μουσικό ύψος του ήχου της χορδής ανεβαίνει),¹¹
3. αντιστρόφως ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της γραμμικής πυκνότητας της χορδής (γι' αυτό λεπτές χορδές παράγουν οξείς ήχους).¹²
4. Θεωρούντες κυλινδρική τη χορδή με πυκνότητα του υλικού της ρ και ακτίνα της κυκλικής της εγκάρσιου διατομής r , τότε η σχέση που δίνει την παραγόμενη συχνότητα του ήχου από τη χορδή βάσει των γεωμετρικών και φυσικών της στοιχείων παίρνει τη μορφή

$$f = \frac{k}{2rL} \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi \rho}} \quad 13.$$

Περί του Πυθαγορείου πειράματος των χορδών με αφορμή τους χαλκουργούς.

Θα πρέπει να τονισθεί ότι ο Ιάμβλιχος στο έργο του *Πυθαγορικός βίος* αναφέρεται εις ένα πλήθος πειραμάτων Ακουστικής με χορδές, με ηχητικούς σωλήνες, με αυλούς, με σύριγγες και με καμπάνες που πραγματοποίησε ο Πυθαγόρας.

Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να λεχθούν λίγα λόγια για το συγκεκριμένο έργο του Ιαμβλίχου, που αποτελεί πολύτιμη πηγή για όλους τους μελετητές του φιλοσόφου Πυθαγόρα ή των Πυθαγορείων, μολονότι συνεγράφη 1000 έτη μετά τον Πυθαγόρα. Δεν υπάρχει

¹¹ Αυτό δεν το εγνώριζαν ακριβώς έτσι οι Πυθαγόρειοι. Θεωρούσαν τη σχέση συχνότητας-τάσεως ως γραμμική.

¹² Αυτό δεν το εγνώριζαν οι Πυθαγόρειοι.

¹³ Αυτό το εγνώριζαν οι Πυθαγόρειοι. Εγνώριζαν ότι χορδές με μεγάλη ακτίνα διατομής r παράγουν ήχο μικρής πυκνότητας ταλαντώσεων (= χαμηλής συχνότητας).

σύγγραμμα, που να γράφτηκε μετά τον Ιάμβλιχο για το μεγάλο φιλόσοφο Πυθαγόρα, το οποίο να μην κάνει μνεία με πολλούς και διαφόρους τρόπους της πηγής αυτής. Κάθε Ιστορία της Φιλοσοφίας ή Ιστορία της Λογοτεχνίας άντλησε από το έργο αυτό. Από άποψη ύφους εμφανίζει μεγάλη ποικιλία. Όχι σπάνια το ύφος του είναι πομπώδες και, καμιά φορά, σκοτεινό, για να μετατραπεί στη συνέχεια σε γλαφυρό και αφηγηματικό. Από άποψη έκφρασης ο συγγραφέας αρέσκεται να μακρηγορεί και να επαναλαμβάνει. Άλλοτε του αρέσει ένας βραχυλογικός τρόπος διατύπωσης των νοημάτων, πράγμα που κάνει το κείμενο πυκνό και περιεκτικό. Τα νοήματα επίσης είναι πολλές φορές ασαφή.

Ο αναγνώστης του έργου αυτού δεν πρέπει να αποκάνει από το σκοτεινό ύφος του, ούτε να στέκεται σκεπτικός μπροστά στα «θαύματα», στις μαγείες και στις θεουργίες. Ας έχει υπ' όψη του ότι την εποχή του Ιαμβλίου, λατρευόταν η μαγεία. Αναμφισβήτητα, όμως, παρ' όλες τις δυσκολίες, τις οποίες καμιά φορά παρουσιάζει στο νόημα και τις συχνές επαναλήψεις, είναι έργο πολύ αξιόλογο.

Η Πυθαγόρεια φιλοσοφία γοητεύει. Ο ιδρυτής εμπνέει το θαυμασμό και, γι' αυτό, λατρεύτηκε σαν θεός. Εξετάζονται εδώ όλοι οι κλάδοι της Παιδείας και οι μέθοδοι αγωγής. Ολόκληρη η Πυθαγόρεια σοφία, όλες οι επιστήμες (Μαθηματικά, Γεωμετρία, Αστρονομία, Ιατρική, Μουσική, Ηθική, Παιδαγωγική, Ψυχολογία, Γυμναστική) διδάσκονται στη Σχολή για πρώτη φορά. Παρέχονται ηθικά παραγγέλματα, που συνδέονται τέλεια με το προσωπικό παράδειγμα του εναρέτου και εγκρατούς Πυθαγόρου. Όλες οι ανθρώπινες αρετές, εγκράτεια, σωφροσύνη, ανδρεία, δικαιοσύνη, εχεμύθεια, λεπτότητα τρόπων και συνηθειών, λιτότητα παραδίδονται στους μαθητές. Καλλιεργούνται τα ευγενέστερα ανθρώπινα συναισθήματα, όπως η φιλανθρωπία, ο αλληλοσεβασμός, η

αγάπη, η στοργή, η κατανόηση. Η φιλία φτάνει στο αποκορύφωμά της. Θιασώτες της είναι οι «εταίροι» του Πυθαγόρα. Επίσης οι μαθητές του γίνονται άριστοι νομοθέτες.

Μερικοί υπέθεσαν ότι το έργο αυτό, που είναι αναντίρρητα το κυριότερο ανάμεσα στα διασωθέντα έργα του Ιαμβλίου, διηγείται θαυμαστά και πολλές φορές υπερφυσικά πράγματα, διότι υπηρετούσε τη διάθεση και το σκοπό του Ιαμβλίου να αντιτάξει τις ιδέες του στο Χριστιανισμό. Ήθελε να καταδείξει ότι και έξω από τον Χριστιανισμό υπήρξαν φιλοσοφικές, ηθικές και θρησκευτικές προσωπικότητες ισάξιες προς τον ιδρυτή του Χριστιανισμού. Στο έργο αυτό, ο Πυθαγόρας είναι σοφός, εγκρατής, δίκαιος. Έχει πολλούς μαθητές. Επιτελεί θαυμάσια πράγματα, «θαύματα». Μεταμορφώνεται, βρίσκεται ταυτόχρονα σε πολλά μέρη. Γοητεύει και παρασύρει τα πλήθη. Θέτει νόμους ηθικούς κ.α. Παρ' όλα αυτά το έργο αυτό δεν παύει να αποτελεί σπουδαία και πολλές φορές μοναδική πηγή για τους Πυθαγορείους και την φιλοσοφία τους.

Στη συνέχεια θα καταβληθεί προσπάθεια να ελεγχθούν, εάν από τη σκοπιά της Μουσικής Ακουστικής δικαιολογούνται όλα όσα αναφέρει ο Ιάμβλιος στο συγκεκριμένο Πυθαγόρειο πείραμα.

Ο Burkert (LS 375-7) αναφέρει ότι έχει καταδειχθεί από τον 17^ο αιώνα ότι κανένα (!) σημείο αυτής της ιστορίας δεν συνάδει με τους νόμους της Φυσικής!

Πρέπει να κατανοήσετε όλοι σας ότι τον Πυθαγόρα τον εβάρυνε μια «κατηγορία», ότι δηλαδή η μουσική αναλογία 12, 9, 8, 6 δεν ήταν δική του ανακάλυψη, αλλά ήταν παρμένη από τους Βαβυλωνίους. Να μη λανθάνει της προσοχής μας ότι κάτι ανάλογο ελέγετο έκτοτε και εξακολουθεί να λέγεται και σήμερα για το Πυθαγόρειο θεώρημα της

Γεωμετρίας, ότι δηλαδή είναι Αιγυπτιακής ή Βαβυλωνιακής προελεύσεως.

Ίσως ο Ιάμβλιχος να κατέγραψε όλα όσα –σωστά ή λανθασμένα- άκουσε για το εν λόγω Πυθαγόρειο πείραμα των χορδών –όπως άλλωστε έκανε και για όλα τα άλλα που μας διέσωσε- ή ίσως, θέλοντας να απαλλάξει τον μεγάλο Πυθαγόρα απ’ αυτήν την κατηγορία, να επενόησε το συγκεκριμένο πείραμα προκειμένου να μας τον παρουσιάσει ως ευρετή της μουσικής αναλογίας 12, 9, 8, 6. Κι’ έτσι να έχουν τα πράγματα, ένα είναι σίγουρο και δεν επιδέχεται αμισβητήσεως, ότι δηλαδή είχε προηγηθεί πειραματική μελέτη επί των χορδών από τους «ειδικούς» μέχρι εκείνη την εποχή και είχαν καταλήξει σε νόμους των χορδών, οι οποίοι αναδύονται από το περιγραφόμενο από τον Ιάμβλιχο πείραμα.

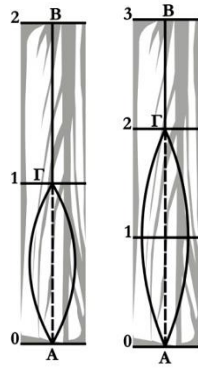
1. Ήξεραν δηλαδή ότι το μήκος της χορδής επηρεάζει το μουσικό ύψος (θα λέγαμε τη συχνότητα), γι’ αυτό ο Πυθαγόρας πειραματίστηκε, εάν πειραματίστηκε, με χορδές ακριβώς ίσου μήκους για να μελετήσει την επίδραση της τάσεως της χορδής στο παραγόμενο μουσικό ύψος του ήχου, θεωρώντας, όμως, γραμμική¹⁴ τη σχέση και ΑΥΤΟ ΗΤΑΝ ΤΟ ΛΑΘΟΣ ΤΟΥ, τον 6^ο αι. π.Χ.

$$f = \frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad k \in \mathbb{N} : \text{Ο Γαυδέντιος}^{15} \text{ μας διηγείται ένα Πυθαγόρειο}$$

πείραμα που από τη σκοπιά της Φυσικής είναι «συμπτωματικώς» σωστό με το οποίο κατεδείχθη ότι το μουσικό ύψος (pitch) των φθόγγων εξαρτάται από το δονούμενο μήκος των χορδών και μάλιστα σε αντίστροφη σχέση.

¹⁴ Δεν εγνώριζε την ύπαρξη της τετραγωνικής ρίζας σ’ αυτή τη σχέση.

¹⁵ Γαυδέντιος ο φιλόσοφος, θεωρητικός της μουσικής. Τοποθετείται από άλλους μεν στον 2^ο με 3^ο αιώνα μ.Χ., από άλλους δε στον 5^ο μ.Χ. αιώνα. Συνέγραψε το βιβλίο «Αρμονική Εισαγωγή», το οποίο αναφέρεται στους ήχους, τα διαστήματα, τα συστήματα, τα γένη κ.λπ. ακολουθώντας άλλοτε τις πυθαγόρειες και άλλοτε τις αριστοξένειες αντιλήψεις.



Διαφορετικά μήκη
ταλαντουμένων τμημάτων
χορδής σε μονόχορδο.

Να εξηγήσω τί εννοώ λέγοντας «συμπτωματικώς». Ο Πυθαγόρας επάνω στο ίδιο μονόχορδο έθεσε σε ταλάντωση δύο διαφορετικά μήκη της χορδής αυτού. Και ο Γαυδέντιος ξεκίνησε από την ίδια λάθος σχέση που ξεκίνησε και ο Ιάμβλιχος, ότι δηλαδή το μουσικό ύψος του ήχου της χορδής είναι ανάλογο της δύναμης που τείνει τη χορδή (=της επιτάσεως), αντί της τετραγωνικής ρίζας της δύναμης που τείνει τη χορδή, και αντιστρόφως ανάλογο του μήκους της χορδής.

Για δύο μήκη ηχούντων τμημάτων της ίδιας χορδής η δύναμη που τα κρατεί τεντωμένα είναι κοινή. Για τον υπολογισμό του μουσικού διαστήματος των μουσικών υψών των ήχων από τα δύο ηχούντα τμήματα της χορδής λαμβάνεται ο λόγος τους, οπότε ο προβληματικός παράγων, δηλαδή η δύναμη τάσης της χορδής ή η τετραγωνική ρίζα της δύναμης τάσης της χορδής απλοποιείται, αφήνοντας από τη σκοπιά της Φυσικής

μια σωστή στην τελική της μορφή σχέση. Δηλαδή $f_1 \propto \frac{1}{L_1} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ και

$$f_2 \propto \frac{1}{L_2} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \propto \frac{L_2}{L_1}, \text{ καθώς επίσης } f_1 \propto \frac{F}{L_1 \sqrt{\mu}} \text{ και}$$

$$f_2 \propto \frac{F}{L_2 \sqrt{\mu}} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \propto \frac{L_2}{L_1}.$$

2. Ήξεραν ότι το πάχος της χορδής επηρεάζει το μουσικό ύψος του παραγόμενου ήχου, γι' αυτό πήρε ο Πυθαγόρας ίσου πάχους χορδές.

$$f = \frac{k}{2rL} \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi \rho}}$$

3. Ήξεραν ότι το υλικό της χορδής επηρέαζε τον ήχο της χορδής, γι’

αυτό πήρε χορδές από το ίδιο υλικό:
$$f = \frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad k \in \mathbb{N}$$

4. Ήξεραν ακόμη για το πόσο η ελαστική συμπεριφορά του υλικού της χορδής, αυτό που εμείς σήμερα λέμε «ακαμψία» της χορδής, επηρέαζε την ποιότητα του ήχου της χορδής. Γι’ αυτό πήρε χορδές «ισοκώλους» και «ισοστρόφους». Όλα αυτά ισχύουν και σήμερα ακριβώς με τον ίδιο τρόπο.

5. Ήξεραν, βέβαια, ότι το μουσικό ύψος του ήχου της χορδής εξαρτάται από τη δύναμη, που τεντώνεται η χορδή και γι’ αυτό τονίζεται στο πείραμα με έμφαση ότι όσο πιο μεγάλο το βάρος του κρεμασμένου από τη χορδή σώματος, τόσο πιο μεγάλο το μουσικό ύψος του παραγομένου ήχου απ’ αυτήν.

Από τα ανωτέρω να κρατήσουμε στο μυαλό μας ότι τη σχέση μεταξύ της δυνάμεως τάσεως της χορδής και του μουσικού ύψους του παραγομένου από τη χορδή ήχου την θεωρούσαν γραμμική της μορφής $f = a \cdot F$, από την οποία προκύπτει ότι διπλάσια δύναμη τάσεως στη χορδή παράγει ήχο με διπλάσιο μουσικό ύψος, ήτοι ήχο κατά μια διαπασών (=οκτάβα) οξύτερο.

Σήμερα γνωρίζουμε ότι η συχνότητα του κάθε αρμονικού του ήχου της χορδής εξαρτάται από την τετραγωνική ρίζα της δύναμης τάσεως της χορδής $f = a \cdot \sqrt{F}$. Αυτή η διαφορά στη γνώση συσχετίσεως μεταξύ του μουσικού ύψους του ήχου της χορδής και της δυνάμεως τάσεως της χορδής δημιουργεί τις όποιες αμφιβολίες και τα ερωτηματικά για την αληθοφάνεια του πειράματος του Πυθαγόρα με τις χορδές, που περιγράφει ο Ιάμβλιχος.

Πράγματι, έστω ότι οι χορδές τείνονται με βάρη 12, 9, 8 και 6 μονάδων βάρους και παράγουν, αντίστοιχα, ήχους με θεμελιώδεις συχνότητες f_{12}, f_9, f_8 και f_6 Hz. Τα δεδομένα αυτά αντικαθιστάμενα στη σχέση των

χορδών $f = \frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ $k \in \mathbb{N}$ δίνουν τα εξής αποτελέσματα:

$$f_{12} = \frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{12}{\mu}} \quad (1)$$

$$f_9 = \frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{9}{\mu}} \quad (2)$$

$$f_8 = \frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{8}{\mu}} \quad (3)$$

$$f_6 = \frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{6}{\mu}} \quad (4)$$

Από τις χορδές που τείνονται με βάρη 12 και 6 μονάδες βάρους, αντίστοιχα προκύπτει το μουσικό διάστημα $\frac{f_{12}}{f_6}$, το οποίο, κατά τον

Ιάμβλιχο, είναι το διπλάσιον διάστημα ή διαπασών ($\frac{12}{6} = \frac{2}{1}$).

Διαιρώντας, όμως, τις σχέσεις (1) και (4) κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{f_{12}}{f_6} = \frac{\frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{12}{\mu}}}{\frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{6}{\mu}}} = \sqrt{\frac{12}{6}} = \sqrt{\frac{2}{1}}, \text{ που αυτή η αριθμητική σχέση – κατά τις πράξεις}$$

μεταξύ των Πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων - δεν εκφράζει το διπλάσιο διάστημα, αλλά ακριβώς το μισό του. Παρομοίως ενεργώντας, καταλήγουμε επίσης στα μη σωστά από άποψη αριθμητικών λόγων

$$\text{αποτελέσματα: } \frac{f_9}{f_6} = \frac{\frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{9}{\mu}}}{\frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{6}{\mu}}} = \sqrt{\frac{9}{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ που αυτή η αριθμητική σχέση –}$$

κατά τις πράξεις μεταξύ των Πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων – δεν

εκφράζει το ημιόλιον διάστημα, αλλά ακριβώς το μισό του:

$$\frac{f_8}{f_6} = \frac{\frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{8}{\mu}}}{\frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{6}{\mu}}} = \sqrt{\frac{8}{6}} = \sqrt{\frac{4}{3}}, \text{ που αυτή η αριθμητική σχέση – κατά τις πράξεις}$$

μεταξύ των Πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων – δεν εκφράζει το

επίτριτον διάστημα, αλλά ακριβώς το μισό του: $\frac{f_9}{f_8} = \frac{\frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{9}{\mu}}}{\frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{8}{\mu}}} = \sqrt{\frac{9}{8}}, \text{ που}$

αυτή η αριθμητική σχέση – κατά τις πράξεις μεταξύ των Πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων - δεν εκφράζει το διάστημα του επογδόου τόνου, αλλά ακριβώς το μισό του.

Κατόπιν αυτών των μη σωστών αποτελεσμάτων, αναδύεται εύλογο ερώτημα σχετικά με την ορθότητα του πειράματος, που περιέγραψε ο Ιάμβλιχος ότι τάχα πραγματοποίησε ο Πυθαγόρας.

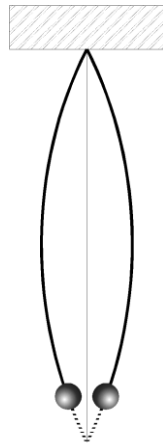
Επίσης, η σχέση $f = \frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad k \in N$, που χρησιμοποιήσαμε από τη θεωρία

των χορδών προϋποθέτει οπωσδήποτε τα δύο άκρα της χορδής να είναι εντελώς ακλόνητα, ώστε τα άκρα αυτά να αποτελούν δεσμούς των στασίμων κυμάτων, που δημιουργούνται επάνω στη χορδή.

Τί συμβαίνει στην περίπτωση που και τα δύο άκρα της χορδής δεν είναι ακλονήτως στερεωμένα (πακτωμένα), αλλά το ένα εξ αυτών έχει μια κάποια δυνατότητα μετατοπίσεως, όπως ακριβώς συμβαίνει στο πείραμα που αναφέρει ο Ιάμβλιχος ότι πραγματοποίησε ο Πυθαγόρας;

Στο πείραμα αυτό μια χορδή είναι από το ένα άκρο της ακλονήτως στερεωμένη σε μία δοκό και τείνεται υπό την επίδραση του βάρους ενός σώματος, το οποίο είναι εξαρτημένο από τη χορδή.

Το βάρος του εξαρτημένου από τη χορδή σώματος κρατάει τη χορδή τεντωμένη και η διεύθυνση της κατακορύφου καθορίζει τη θέση ισορροπίας της. Κατά την ταλάντωση της χορδής, καθώς αυτή κινείται προς τα δεξιά ή προς τ' αριστερά, παρασύρει «σ μικρόν και κατ' ολίγον» - λόγω αδρανείας - και το εξαρτημένο σώμα, αντιστοίχως, προς τα δεξιά ή προς τ' αριστερά. Αυτή η κίνηση του εξαρτημένου σώματος επιφέρει εναλλάξ μία φαινομένη επιμήκυνση και μία φαινομένη επιβράχυνση ΔL του αληθούς μήκους L της ταλαντουμένης χορδής, οπότε η παραγόμενη από τη χορδή συχνότητα είναι χαμηλότερη ή υψηλότερη, αντιστοίχως, της πρέπουσας συχνότητας:



Ταλάντωση χορδής με ένα άκρο πακτωμένο και ένα άκρο ελεύθερο, από το οποίο κρέμεται σώμα μάζης m .

Παρατηρούμε ότι πουθενά δεν εμφανίζεται η δύναμη με την οποία κρούμε τη χορδή ή το μέταλλο· οπότε η παραγομένη συχνότητα δεν εξαρτάται από τη δύναμη με την οποία κρούμε τη χορδή ή το μέταλλο. Όσο μεγαλύτερη η δύναμις με την οποία κρούμε το ηχογόνο σώμα, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η στάθμη έντασης του παραγομένου ήχου από το ηχογόνο σώμα και όχι η συχνότητα του εκπεμπομένου ήχου από το ηχογόνο σώμα. Αυτά σημαίνουν ότι ούτε το σφυρηλατούμενο μέταλλο, ούτε το αμόνι εξέπεμπαν τους ήχους που αναφέρει ο Ιάμβλιχος. Τότε;

Τότε τα μόνα ηχογόνα σώματα που απομένουν είναι αυτά καθ' αυτά τα σφυριά με το διαφορετικό τους βάρος και, συνεπώς, τον διαφορετικό τους όγκο και τη διαφορετική τους μάζα το καθένα. Εάν, όμως, δεχθούμε

τα σφυριά στον ρόλο των ηχογόνων σωμάτων, τότε χάνεται ο κυρίαρχος για το Ιαμβλίχειο πείραμα ρόλος των βαρών των σφυριών ως δυνάμεων που τείνουν τις χορδές. Άλλωστε, εν κατακλήϊδι, πώς είναι δυνατόν ένα πείραμα το οποίον επραγματοποιήθη με σφυριά των χαλκουργών επί τη βάσει της θεωρίας των κρουστών μουσικών οργάνων να επαναλαμβάνεται και να μελετάται με χορδές επί τη βάσει της θεωρίας των εγχόρδων μουσικών οργάνων, η οποία είναι εντελώς άσχετη με την πρώτη;

Συμπέρασμα: το Ιαμβλίχειο πείραμα κι εδώ χωλαίνει.

Όλα τα παραπάνω συνηγορούν στο ότι το περιγραφόμενο από τον Ιάμβλιχο και αποδιδόμενο στον Πυθαγόρα πείραμα με τις τέσσερις χορδές είναι μη σωστό από τη σκοπιά της Φυσικής και, κατά τη γνώμη μου, αποτελεί εφεύρημα του Ιαμβλίχου προκειμένου να απαλλάξει των κατηγοριών και των συκοφαντιών τον μεγάλο διδάσκαλο, τον Πυθαγόρα. Με άλλα λόγια, λέω ότι πρόκειται για το στήσιμο ενός αληθοφανούς πειράματος επί δεδομένων αριθμητικών αποτελεσμάτων, το οποίο για μια χρονική περίοδο μεγαλύτερη των χιλίων ετών είχε γοητεύσει, είχε εντυπωσιάσει και είχε εξαπατήσει τους πάντες, ακόμη και την επιστημονική κοινότητα.