



Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΚΟΣΜΟΥ ΩΣ ΔΙΑΛΕΚΤΙΚΗ ΚΑΤΑ ΠΛΑΤΩΝΑ

Γεώργιος Χ. Κουμάκης

Επίκουρος Καθηγητής Φιλοσοφίας του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Περίληψη

Τὰ τέσσερα κάλλιστα τρίγωνα, με τὰ ὁποῖα ὡς στοιχεῖα κατασκευάζονται τὰ πέντε κάλλιστα σώματα, διαιροῦνται σὲ ἀνὰ δύο ἀντίθετες κατηγορίες κατὰ τρόπο διαλεκτικό: ἡμιτετράγωνο καὶ ἡμιτρίγωνο. Τὸ τελευταῖο ὑποδιαιρεῖται πάλι σ' ἐκεῖνο 1) ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ 2) ἰσοσκελοῦς. Τὸ δεύτερο ὑποδιαιρεῖται πάλι σ' ἐκεῖνο με γωνίες 1) $72^\circ, 54^\circ, 54^\circ$, (36, 54, 90) καὶ 2) 36, 72, 72, δηλαδή χρυσοῦ τριγώνου (18, 72, 90). Ἡ γωνία κορυφῆς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ με 36° εἶναι διπλάσια ἀπὸ ἐκείνη τοῦ προηγουμένου. Με τὸ σκαληνὸ ἡμιτρίγωνο κατασκευάζονται τὰ τέσσερα σχήματα, ἐνῶ με τὸ ἡμιτετράγωνο, μόνον ὁ κύβος, ὁ ὁποῖος εἶναι σύμβολο τῆς γῆς. Με τὸ ἡμιτρίγωνο ἰσοπλεύρου τριγώνου σχηματίζονται ἡ πυραμίδα, τὸ ὀκτάεδρο καὶ τὸ εἰκοσάεδρο, με τὰ ὁποῖα γεννῶνται ἡ φωτιά, ὁ ἀέρας καὶ τὸ νερὸ ἀντίστοιχα. Με συνδυασμὸ τῶν δύο ἄλλων ἡμιτριγώνων σὲ ἀναλογία δύο πρὸς ἓνα δημιουργεῖται τὸ δωδεκάεδρο, ποῦ ἀπεικονίζει τὸ πᾶν. Ἀπὸ τῆ μιᾶ μεριᾶ ἡ γέννηση, σύνθεση, ἄρμογή, συναγωγή, σύνδεσμος, δεσμὸς καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλη ἡ λύσις τοῦ κόσμου εἶναι οἱ δυὸ ἀντίθετοι δρόμοι τῆς διαλεκτικῆς.

Λέξεις κλειδιά: κάλλιστα τρίγωνα, δωδεκάεδρο, διαλεκτική.

Ἡ μαθηματικὴ δομὴ τοῦ αἰσθητοῦ κόσμου ἐντάσσεται στὸ πλαίσιο τῆς διαλεκτικῆς κατὰ Πλάτωνα, ἀφοῦ αὐτὴ συντελεῖται κατὰ τρόπο διαλεκτικὸ μετὰ τὴ γνωστὴ μέθοδο τῆς σύνθεσης, τῆς διαίρεσης καὶ τῶν ἀναλογιῶν. Ὁ Πλάτων χρησιμοποίησε σύμβολα καὶ προέβη σὲ μαθηματικὲς διεργασίες γιὰ τὴ δημιουργία τοῦ κόσμου. Ἡ μαθηματικοποίηση ὅμως αὐτὴ δὲν εἶναι φανερὴ καὶ εὐδιάκριτη ἀλλὰ σκοτεινὴ, ἀσαφὴς καὶ αἰνιγματώδης. Ἐναπόκειται συνεπῶς στοὺς μελετητὲς τοῦ Πλάτωνα νὰ τὴν ἀνακαλύψουν, πρᾶγμα ποῦ δημιουργεῖ ἀμφιβολία καὶ ἀμφισβήτηση, ἀφοῦ πρόκειται γιὰ εἰκασίες καὶ ὑποθέσεις, ὅπου ὁ



λόγος δύσκολα μπορεί να είναι ασφαλής και βέβαιος. Ωστόσο, ή εἴπω κατὰ προσέγγιση ἀνεύρεση τῶν μαθηματικῶν παραμέτρων εἶναι ἀπαραίτητος ὅρος γιὰ τὴν κατανόηση τῆς διαλεκτικῆς του. Κατὰ συνέπεια ἡ τυχὸν λύση τῶν προβλημάτων ἐκ μέρους εἴτε τῶν πάλαι ποτὲ ἀκροατῶν εἴτε τῶν ἀναγνωστῶν τοῦ – ἂν καὶ ὅποτε αὐτὴ ἐπιτευχθεῖ – δημιουργεῖ τὶς ἀναγκαῖες προϋποθέσεις γιὰ τὴ σύλληψη τῆς διαλεκτικῆς, ἢ ὁποῖα μὲ κανένα τρόπο δὲν εἶναι δεδομένη, ἀλλὰ σπάνιο, κοπιῶδες καὶ ἐν τέλει πολύτιμο εὕρημα τῶν θαυμαστῶν τῆς φιλοσοφίας του. Ὁ Πλάτων ἀπλῶς ἔθετε προβλήματα, ἀλλὰ δὲν τὰ ἔλυσε οὔτε ἔκανε αὐστηρὲς μαθηματικὲς ἀποδείξεις ὅπως π.χ. ὁ Εὐκλείδης. Χρησιμοποιοῦσε ὡστόσο τὰ μαθηματικὰ πορίσματα σιωπηρὰ (ex silentio). Αὐτὸ σημαίνει ὅτι γνῶριζε τὰ συμπεράσματα τῶν ἀποδείξεων χωρὶς ὅμως νὰ τὶς παραθέτει. Ὅταν ὁ μαθηματικὸς Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεὺς μέμφεται συλλήβδην τοὺς φιλοσόφους ὅτι «ἀποφαίνονται» μόνον, διατυπώνουν τὴ γνώμη τους, χωρὶς ἀποδείξεις, συμπεριλαμβάνει προφανῶς καὶ τὸν Πλάτωνα (Σπανδάγος 2004β: 'Ε ἴθ', σ.32 καὶ Fr. Hultsch). Ἡ τακτικὴ του αὐτὴ ἔχει ὠθήσει, βαθυστόχαστους καὶ ἀξιολογότατους φιλολόγους νὰ δεχθοῦν τὴν ἄγραφη διδασκαλία, ὑποθέτοντας ὅτι ὁ φιλόσοφος μόνον εἶπε τὴ φιλοσοφία του, ἀλλὰ δὲν τὴν ἔγραψε.

Ἡ τάση αὐτὴ κινεῖται ἐν μέρει στὴν ὀρθὴ κατεύθυνση, ἐπειδὴ οἱ ὀπαδοὶ τῆς δίκαια ἀντιλήφθηκαν ὅτι ἡ φιλοσοφία τοῦ Πλάτωνα δὲν εἶναι γραμμὴν ὅπως τὰ ἄλλα μαθήματα. Ἡ διαπίστωση αὐτὴ δὲν βασίζεται σὲ τυχὸν δυσχέρειες ποὺ εἶχαν νὰ κατανοήσουν δύσκολα σημεῖα τῶν κειμένων τοῦ Πλάτωνα, ὅπως γιὰ παράδειγμα τὴν τετμημένη γραμμὴ τῆς *Πολιτείας* (ΣΤ 509 d κ. ἐξ.), ἀλλὰ σὲ ἀναφορὰς τοῦ ἴδιου τοῦ Πλάτωνα καὶ ἰδιαίτερα στὸν *Φαῖδρο* καὶ στὴν *Ζ' Ἐπιστολὴ* καθὼς καὶ σὲ γραπτὰ ἀρχαίων σχολιαστῶν (Gaiser 1962). Τὸ περίεργο ὅμως εἶναι ὅτι ἐκεῖ ἡ φιλοσοφία παρουσιάζεται ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ρητὴ οὔτε γραπτὴ (*Ζ' Ἐπ.* 341d: «γραφέντα ἢ λεχθέντα, γραπτὰ καὶ ρητὰ»), Πβ. Koumakis



G. 2004), ενώ υπάρχουν χωρία που έχουν παρερμηνευθεί. Για παράδειγμα, στην τετμημένη γραμμή σύμφωνα με την κρατούσα έρμηνεία τα δύο μεσαία τμήματά της είναι ίσα, πράγμα που ακυρώνει και γελοιοποιεί τη σκέψη του Πλάτωνα. Όρισμένοι δικαιολογούν το άτοπημα αυτό, με το να έπιρρίπτουν στον Πλάτωνα την κατηγορία της άπροσεξίας για το σημαντικό αυτό λάθος, ενώ άλλοι ισχυρίζονται ότι ο Πλάτων είχε πλήρη συνείδηση των ενεργειών του (Y. Balashov 1994: 283). Όρθότερη μου φαίνεται η άποψη του I. Θεοδωρακόπουλου (1971: 54), σύμφωνα με την οποία ο αναγνώστης έχει την εντύπωση ότι κατενόησε τα λόγια του Πλάτωνα, ενώ έχει πλήρη άγνοια: «Είναι ο Πλάτων ίσως ο δυσκολώτερος συγγραφέας και πνευματικός δημιουργός του κόσμου, γιατί κανενός άλλου δημιουργού ο λόγος δεν αποπλανεύει τόσο τον αναγνώστη του, ώστε να νομίζει ότι τον καταλαβαίνει την ώρα ακριβώς που δεν έχει καταλάβει ακόμα τίποτε». Πάντως, από τη μαθηματική συναρμογή και εν συνεχεία τη λύση του κόσμου προκύπτει η διαλεκτική, ή οποία δεν είναι άλλη από την κατ' είδη διαίρεση και σύνθεση. Άλλωστε και τα τρίγωνα με τα οποία δομείται ο κόσμος, διέπονται από την κατ' είδος διαίρεση.

Η γέννηση του κόσμου συντελέστηκε κατά τον Πλάτωνα από τον δημιουργό κατά τρόπο μαθηματικό, αφού χρησιμοποιήθηκαν αναλογίες κατά τη συναρμογή του (Τίμ., 32c, 36d 6, 56c, Πολιτ., ΣΤ 500c 4). Έτσι προήλθε η τάξη και η κοσμιότητα από την αταξία, το χάος και την άκοσμία (Τίμ., 30a, Πολιτικ., 273b 6). Αυτά είναι αντανάκλαση της ψυχής, ή οποία πρέπει να επιδιώκει και να άσκει τη δικαιοσύνη και τη σωφροσύνη, για να είναι ευδαίμων και να αποφεύγει την άκολασία και την άδικία. Ο Πλάτων παραθέτει τη γνώμη των σοφών ότι το σύμπαν, αυτό δηλαδή που ονομάζουμε ούρανó, γη, θεούς και ανθρώπους, συνεχί ή έπικοινωνία, ή φιλία, ή κοσμιότητα, ή σωφροσύνη και δικαιοσύνη, και γι' αυτόν τον λόγο ονομάστηκε κόσμος, και όχι άκοσμία ή άκολασία (Γοργ., 507c –



508a, *Πρωτ.* 322c). Λόγω τῶν ἀναλογιῶν, πού χρησιμοποίησε ὁ Πλάτων στὴ δομὴ τοῦ κόσμου, κατηγορήθηκε ἀπὸ τὸν μαθητὴ τοῦ Ἀριστοτέλη ὅτι καταμαθηματοποίησε, «κατεμαθηματοκεύσατο τὸ πᾶν», ὅπως ἀναφέρει ὁ Ἰωάννης ὁ Φιλόπονος (1897: 481, 34. Πβ. Δ. Μούκανος 1979: 66-72). Ἀπὸ τὸν *Τίμαιο* τοῦ Πλάτωνα ἐπηρεάστηκαν ἐντονότατα ὄχι μόνο οἱ ἀρχαῖοι ὅπως οἱ Στωικοὶ (Ἐ. Καραμπατζᾶκη 2014), ἀλλὰ καὶ οἱ μετέπειτα ἀστρονόμοι, οἱ ὁποῖοι ἐντυπωσιάστηκαν ἀπὸ τὴ μαθηματοποίηση τοῦ παντός, ὅπως ὁ Kepler (1981, Π. Παπασπύρου 2014), ὁ Γαλιλαῖος καὶ ὁ νομπελίστας φυσικὸς W. Heisenberg (2008, 21, 286), ὁ ὁποῖος ἀπέδωσε μεγάλη σημασία στὰ τρίγωνα, μὲ τὰ ὁποῖα ὁ Πλάτων οἰκοδομεῖ τὸν κόσμο. Τὰ ἴδια εἶναι συμμετρικὰ (D. Lloyd 2006). Παραθέτουμε τὰ λόγια τοῦ Γαλιλαίου (1623: 17) κατὰ τὴ μετάφραση τῆς Χρ. Φίλη (2002). «Τὸ βιβλίο εἶναι γραμμένο σὲ μαθηματικὴ γλῶσσα καὶ τὰ σύμβολα εἶναι τρίγωνα, κύκλοι καὶ ἄλλα γεωμετρικὰ σχήματα, χωρὶς τὴ βοήθεια τῶν ὁποίων δὲν μποροῦμε οὔτε μιὰ λέξη νὰ κατανοήσουμε, χωρὶς αὐτὰ μάταια περιπλανιέται κανεὶς σ' ἓναν σκοτεινὸ λαβύρινθο».

Τὸ ἐρώτημα πού προβάλλει στὴ συνέχεια εἶναι νὰ μάθουμε ἢ μᾶλλον νὰ εικάσουμε γιὰ ποιὸν λόγο ὁ Πλάτων μαθηματοποίησε τὴ δομὴ καὶ σύσταση τοῦ κόσμου καὶ γιατί κατέφυγε συγκεκριμένα στὰ τρίγωνα καὶ ὄχι σὲ ὁποιοδήποτε ἄλλο γεωμετρικὸ σχῆμα ἢ ἄλλου τύπου μαθηματικὲς ἀπεικονίσεις. Βέβαιη ἀπάντηση στὸ τεθὲν ἐρώτημα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουμε, διότι δὲν σφύζονται γραπτὲς μαρτυρίες. Μποροῦμε ὅμως νὰ κάνουμε ὑποθέσεις καὶ εικάσιες, χρησιμοποιώντας τὴν ἔμμεση ἀπόδειξη, δηλαδή τὴν κατ' ἀναλογίαν. Ὁ Πορφύριος στὸ βιβλίο τοῦ περὶ τοῦ *Πυθαγόρου βίου* (1982: 49 σ. 59) ἀναφέρει τὴ μαρτυρία, κατὰ τὴν ὁποία ἐξηγεῖται γιατί οἱ Πυθαγόρειοι παριστοῦσαν τὰ ὄντα μὲ τοὺς ἀριθμούς. Λέγει λοιπὸν ὅτι αὐτοί, ἐπειδὴ δὲν μποροῦσαν νὰ παραδώσουν μὲ τὸν λόγο τὰ πρῶτα εἶδη καὶ τὶς πρῶτες ἀρχές,



λόγω του ότι ήταν δύσκολες στη σύλληψη και στην έκφορά, κατέφυγαν στους αριθμούς χάριν μιᾶς εύκολοκατανόητης διδασκαλίας, μιμούμενοι τούς γεωμέτρους και τούς γραμματιστές. Οί γεωμέτρους μὴ δυνάμενοι κατὰ τὴ διδασκαλία νὰ παραστήσουν τὰ σωματοειδῆ μὲ τὸν λόγο προσέφυγαν στὰ διαγράμματα τῶν σχημάτων λέγοντας ὅτι τὸ τρίγωνο ποὺ διέγραφαν κάθε φορὰ δὲν ἦταν τοῦτο, συγκεκριμένα αὐτὸ τὸ τρίγωνο ποὺ ὑποπίπτει στὴν ὄψη μας, ἀλλὰ τοιοῦτο, δηλαδή τέτοιας λογῆς. Μὲ αὐτὰ οἱ γεωμέτρους ἤθελαν νὰ παραδώσουν στοὺς ἄλλους τὴν ἔννοια τοῦ τριγώνου. Ἐπειδὴ ὁ Πλάτων εἶχε ὑποστειῖ ἔντονη τὴν ἐπίδραση τῶν Πυθαγορείων, εἶναι φυσικὸ καὶ εὐλόγο νὰ ὑποθέσει κανεὶς ὅτι τὸν ἴδιο δρόμο ἀκολούθησε στὸ σημεῖο αὐτό. Ἦθελε δηλαδή νὰ διδάξει στοὺς μεταγενέστερους τὸν τρόπο σύστασης τοῦ κόσμου. Ἐπειδὴ ὅμως αὐτὸ ἦταν ἐξαιρετικὰ δύσκολο, ἂν μὴ ἀδύνατο, νὰ γίνει μὲ λόγια, γι' αὐτὸ χρησιμοποίησε γεωμετρικὰ σχήματα καὶ μαθηματικὲς ἀναλογίες. Ἡ ἄποψη αὐτὴ ἐνισχύεται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ τέσσερα πρῶτα καὶ κάλλιστα σώματα δὲν ὀνομάζονται ἀπὸ τὸν ἴδιο στοιχεῖα, ἀλλὰ γινόμενα καὶ ἀπολλύμενα, δηλαδή ἀπομιμήσεις τῶν ἀληθινῶν ὄντων, ὥστε γιὰ κανένα ἀπ' ὅσα ἔχουν γένεση δὲν μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθεῖ πιστὸς καὶ βέβαιος λόγος (*Τίμ.*, 28a, 48e – 49a). Γιὰ ὅλα τα σώματα ποὺ ἔχουν γένεση δὲν πρέπει νὰ χρησιμοποιεῖται ἡ δεικτικὴ ἀντωνυμία τοῦτο ἀλλὰ τὸ τοιοῦτο, δηλαδή τέτοιας λογῆς, ἐπειδὴ δὲν ἔχουν σταθερὴ καὶ μόνιμη ὑπόσταση ἀλλὰ μεταπίπτουν συνεχῶς, ἀφοῦ τὸ ἓνα μεταβάλλεται στὸ ἄλλο. Στὴν ἴδια κατηγορία ὑπάγεται καὶ τὸ τρίγωνο καὶ ὅλα τα σχήματα (*Τίμ.*, 49c), ποὺ λέγονται μαθηματικά.

Τὸ ἐρώτημα ποὺ προκύπτει περαιτέρω εἶναι γιατί ὁ Πλάτων προτίμησε τὰ τρίγωνα καὶ ὄχι κάποιο ἄλλο γεωμετρικὸ σχῆμα. Ὁ ἴδιος δίνει ἔμμεσα ἀπάντηση λέγοντας ὅτι ἀπὸ τὰ τρίγωνα, καὶ συγκεκριμένα ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια, γεννῶνται ὅλα τα σχήματα καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὰ πέντε σώματα. Ὁ Ἰάμβλιχος σημειώνει



ὅτι ἀπὸ τὸ τρίγωνο καὶ τὸ τετράγωνο γεννῶνται κατὰ Πλάτωνα τὰ πέντε σχήματα καὶ τὰ ἀντίστοιχα σώματα (Γιάμβλιχος, 1922: 87). Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα χρησιμεύουν δηλαδή ὡς ἀρχές καὶ αἰτίες γένεσης ὄλων των ὀρατῶν ὄντων. Ὁ Πλάτων ὁμολογεῖ ὡστόσο ὅτι ὑπάρχουν κι ἄλλες ἀνώτερες ἀρχές, χωρὶς νὰ τις κατονομάζει, τὶς ὁποῖες γνωρίζει μόνον ὁ θεὸς καὶ ὁ φίλος τοῦ θεοῦ, δηλαδή ὁ φιλόσοφος (Τίμ., 53 c – d). Αὐτὲς βρίσκονται προφανῶς στὸ βασίλειο τῶν ιδεῶν μὲ προεξάρχουσα τὴν ιδέα τοῦ ἀγαθοῦ, ἀφοῦ λέγεται ρητὰ ὅτι ὁ ὀρατὸς καὶ ἀπτὸς κόσμος εἶναι εἰκὼν τοῦ νοητοῦ (Τίμ., 92c 7, π.β. Γ. Κουμάκης, 2013). Τὰ τρίγωνα εἶναι στοιχεῖα τῶν σχημάτων (Τίμ., 54d 6), τὰ ὁποῖα μὲ τὴ σειρά τους εἶναι στοιχεῖα τῶν σωμάτων (Τίμ., 56b 5), ἐνῶ τὰ σώματα δὲν εἶναι στοιχεῖα τοῦ παντὸς (Τίμ., 48 b – c). Τὸ τρίγωνο εἶναι τὸ ἔσχατο, δηλαδή τὸ ἐλάχιστο γεωμετρικὸ σχῆμα, στὸ ὁποῖο ὁ μαθηματικὸς θὰ σταματήσει τὴ διαίρεση τῶν σχημάτων (Ἡθ. Νικ., Z 8 1142a 28-29). Εἶναι συνεπῶς ἄτμητο καὶ ἀδιαίρετο ὡς πρὸς τὸ εἶδος. Ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς (1866: B a) δίνοντας τὸν ὀρισμὸ τοῦ στοιχείου λέγει ὅτι στοιχεῖο εἶναι ἐκεῖνο, ἀπὸ τὸ ὁποῖο ὡς ἐλάχιστον συνίσταται κάτι, καὶ εἰς τὸ ὁποῖο ὡς ἐλάχιστο ἀναλύεται. Λέγει ἐπίσης (B ζ') ὅτι τὸ τρίγωνο εἶναι ἀρχικώτατον καὶ στοιχειωδέστατον σχῆμα, διότι, ἐὰν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἀχθοῦν εὐθεῖες πρὸς τὸ μέσον τοῦ σχήματος, αὐτὸ ἀναλύεται σὲ τόσα τρίγωνα ὅσες τυχαίνει νὰ εἶναι οἱ πλευρές. Ἄν τὸ ἴδιο πρᾶγμα γίνεῖ στὸ τρίγωνο, αὐτὸ δὲν θὰ μεταπέσει σὲ ἄλλο σχῆμα ἀλλὰ στὸν ἑαυτὸ του. Ὁ Ἀριστοτέλης δίνοντας τὸν ὀρισμὸ τοῦ στοιχείου λέγει ὅτι στοιχεῖο εἶναι τὸ πρῶτο ἐνυπάρχον, πού εἶναι ἀδιαίρετο σὲ ἄλλο εἶδος (Μ.τ.φ., B 3, 999a 1-5, Δ 3, 1014a 26-30). Ὁ Πλάτων (Τίμ., 82a 1-2, Παρμ., 130c 1-2) ὡς πρὸς τὴ σχέση τοῦ στοιχείου καὶ τοῦ ἀνθρώπινου σώματος ἀκολουθεῖ τὴν ἄποψη τοῦ Ἐμπεδοκλῆ, ὁ ὁποῖος δέχεται ὅτι τὸ πῦρ, ὁ ἀέρας, τὸ νερὸ καὶ ἡ γῆ εἶναι τὰ στοιχεῖα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα σύγκειται τὸ ἀνθρώπινο σῶμα, κατ' ἀντίθεση πρὸς τὸν Ἀναξαγόρα, ὁ ὁποῖος πιστεύει τὸ



ἀκριβῶς ἀντίθετο, ὅτι δηλαδή τὸ πῦρ, ὁ ἀέρας καὶ τὰ ἄλλα σώματα εἶναι μείγματα τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος, τὰ μέρη τοῦ ὁποίου, εἶναι στοιχεῖα αὐτῶν, ἐπειδὴ εἶναι ὁμοιομερῆ (H. Diels – W. Kranz, Κύρκος, I 2005: B 72 a σ. 582, II 2007: B 43a, σ. 43).

Τέσσερα εἶναι τὰ κάλλιστα ὀρθογώνια, μὲ τὰ ὁποῖα δομεῖται ὁ κόσμος κατὰ Πλάτωνα. Τὸ πρῶτο, ποὺ ἀποκαλεῖται ἀπὸ τὸν ἴδιο κάλλιστο, εἶναι τὸ ἥμισυ ἰσοπλεύρου τριγώνου, δηλαδή ἐκεῖνο ποὺ ἔχει γωνίες 30, 60 καὶ 90 μοιρῶν ἢ ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν ὑποτείνουσα εἶναι ὡς πρὸς τὸ μῆκος διπλάσια ἀπὸ τὴ μικρότερη κάθετη πλευρὰ, ἡ δὲ μεγαλύτερη κάθετη πλευρὰ εἶναι πρὸς τὴ μικρότερη τριπλῆ κατὰ δύναμη (Τίμ., 54b 4-5). Τὰ ὑπόλοιπα τρία οἴκοθεν ἐννοεῖται ὅτι εἶναι κάλλιστα, ἀφοῦ χρησιμεύουν στὴ σύσταση τῶν πέντε καλλίστων σωμάτων. Τὸ δεύτερο κάλλιστο τρίγωνο εἶναι τὸ ὀρθογώνιο ἰσοσκελές (Τίμ., 54a, 55bc), δηλαδή τὸ ἡμιτετράγωνο. Τὸ τρίτο εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖο μνημονεύει ὁ Πλάτων στὴν Πολιτεία (546b κ.ε.), γιὰ νὰ δείξει τὴ θεία καὶ τὴν ἀνθρώπινη γέννηση, δηλαδή τοῦ ἀνθρώπου καὶ τοῦ κόσμου. Ἡ σχέση τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 3, 4, 5, οἱ δὲ γωνίες 36, 54 καὶ 90 μοιρῶν, τὸ ὁποῖο ἀποκαλεῖται ζωογονικὸ ἢ κοσμικὸ ἢ Πυθαγορικὸ τρίγωνο (Proclus 1901: 43). Πρέπει ἐδῶ νὰ σημειωθεῖ ὅτι ἡ ἀνεύρεση τῶν δύο καλλίστων τριγώνων, μὲ τὰ ὁποῖα ὡς στοιχεῖα συντίθεται τὸ δωδεκάεδρο, εἶναι προῖον δικῶν μου συλλογισμῶν καὶ ἀτομικῆς μου εὐθύνης σὲ συνεργασία μὲ μαθηματικούς, οἱ ὁποῖοι ἔκαμαν μὲ δικές μου ὁδηγίες τὶς ἀποδείξεις, πρᾶγμα ποὺ παρουσιάζεται τώρα γιὰ πρώτη φορά. Ἡ ἐπικρατέστερη ἀντίληψη γιὰ τὸ τρίτο εἶδος τοῦ τριγώνου, ποὺ συγκροτεῖ τὸ δωδεκάεδρο, τὸ ὁποῖο συμβολίζει τὸν κόσμον, εἶναι ὅτι αὐτὸ εἶναι τὸ χρυσὸ τρίγωνο, δηλαδή τὸ ἰσοσκελές μὲ γωνία κορυφῆς 36 καὶ βάσεων 72°, 72°, δηλαδή τοῦ διπλάσιου (Th. Heath, 1921: 296-7, 1931: 176-7, 1956: 98-99). Ἡ ἀντίληψη ὅμως αὐτή, ὅπως θὰ δείξουμε στὰ ἐπόμενα δὲν



εύσταθεῖ. Τὸ τέταρτο κάλλιστο τρίγωνο, μὲ τὸ ὁποῖο δομεῖται ὁ κόσμος, εἶναι τὸ ἡμισὺ τοῦ χρυσοῦ τριγώνου μὲ γωνίες 18, 72, 90.

Μὲ τὸ πρῶτο κάλλιστο τρίγωνο, δηλαδή τὸ ἡμιτρίγωνο ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἂν τοποθετηθεῖ ἀνὰ δύο χιαστί, σχηματίζονται τὰ τρία κανονικὰ κυρτὰ πολύεδρα, δηλαδή τὸ τετράεδρο ἢ πυραμίδα, τὸ ὀκτάεδρο καὶ τὸ εἰκοσάεδρο, ἀπὸ τὰ ὁποῖα γεννῶνται τὸ πῦρ, ὁ ἀέρας καὶ τὸ νερὸ ἀντίστοιχα, ἀφοῦ εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦς (Τίμ., 55α – c, 56b 5). Ἀπὸ τὸ δεύτερο κάλλιστο τρίγωνο, δηλαδή τὸ ὀρθογώνιο ἰσοσκελές, σχηματίζεται τὸ ἑξάεδρο ἢ ὁ κύβος, ἀπὸ τὸ ὁποῖο γεννᾶται ἡ γῆ (Τίμ., 55b 4-5). Ὁ Πλούταρχος παραδίδει ὅτι κατὰ τὸν Πυθαγόρα ἀπὸ τὰ 5 σχήματα, τὰ ὁποῖα λέγονται καὶ μαθηματικά, γεννῶνται τὰ 5 σώματα καὶ ἐπομένως ἡ ἰδέα αὐτὴ εἶναι Πυθαγορική προέλευσης (887 b-c, Εὐσέβιος, Ἐκκλησιαστ. Προπαρασκευὴ 15. 37. 6. 1) Οἱ βάσεις τῶν τριῶν πρώτων σωμάτων εἶναι τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο, τὸ ὁποῖο συνίσταται ἀπὸ ἕξι ἴσα καὶ ὅμοια ἡμιτρίγωνα ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐνῶ οἱ βάσεις τῆς γῆς, ἀπὸ τέσσερα ἴσα καὶ ὅμοια ἰσοσκελεῖ ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἐπομένως ἡ πυραμίδα σύγκειται ἀπὸ 24 (= 4 (6), τὸ ὀκτάεδρο ἀπὸ 48 (= 8 (6) καὶ τὸ εἰκοσάεδρο ἀπὸ 120 (= 20 (6) ἡμιτρίγωνα ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐνῶ τὸ ἑξάεδρο ἢ ὁ κύβος ἀπὸ 24 (= 6 (4) ἡμιτετράγωνα, δηλαδή ὀρθογώνια ἰσοσκελεῖ τρίγωνα. Τὸ δωδεκάεδρο, πού ἀπεικονίζει τὸν ὄρατὸ κόσμον, ὁ ὁποῖος μὲ τὴ σειρὰ τοῦ εἶναι εἰκόνα τοῦ νοητοῦ (Τίμ., 92c 7), δὲν ἀναφέρεται ρητὰ καθόλου ἀπὸ τὸν ἴδιον τὸν Πλάτωνα, παρὰ μόνον ἀπὸ μεταγενέστερους καὶ συγκεκριμένα ἀπὸ τὸν Τίμαιον τὸν Λοκρὸν (98d) καὶ τοῦς σχολιαστὰς τοῦ Πλάτωνα, ὅπως π.χ. ἀπὸ τὸν Ἀλκίνοον (H XIII, 168 – 169, 31) ἢ Ἀλμπίνο (75) καὶ τὸν Πλούταρχον (1003c), οἱ ὁποῖοι ἰσχυρίζονται ὅτι τὸ δωδεκάεδρο σύγκειται ἀπὸ 360 πρῶτα τρίγωνα. Ὁ ἴδιος ὁ Πλάτων τὸ ὑπαινίσσεται στὸν Τίμαιον (55c 4 – 6) κάνοντας λόγο γιὰ μιὰ πέμπτη σύσταση.

Ἡ κατασκευὴ καὶ ἐρμηνεία τοῦ δωδεκαέδρου παρουσιάζει δυσεπίλυτα προ-



βλήματα και αρκετές δυσχέρειες στην κατανόηση. Μέχρι σήμερα δέν υπάρχει όμοφονία ή μάλλον επικρατεί πλήρης άγνοια για τὸ ποιά εἶναι τὰ στοιχεῖα, δηλαδή τὰ τρίγωνα ἀπὸ τὰ ὁποῖα αὐτὸ συγκροτεῖται. Λένε γιὰ παράδειγμα ὅτι ἡ ἀναφορὰ τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἐντελῶς περιττὴ καὶ ἄχρηστη, ἀφοῦ ὑπάρχουν τὰ τέσσερα κάλλιστα σώματα καὶ ὅτι ἡ προσφυγὴ στὰ τρίγωνα γιὰ τὴ σύνθεσή του εἶναι «ἀδύνατη ἢ δυσχερέστατη» (Κάλφας 1997: 441 σήμ. 337). Τὰ στοιχεῖα δὲ τοῦ δωδεκαέδρου, δηλαδή τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, ἀπὸ τὸ ὁποῖο αὐτὸ ἀποτελεῖται, εἶναι ἄγνωστα μέχρι σήμερα. Μὲ τὴν παροῦσα εἰσήγηση θὰ ἤθελα νὰ ἀνακοινώσω ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι συνδυασμὸς δύο εἰδῶν τριγώνων, παρόλο πὺ καὶ τὰ δύο εἶναι ἡμιτρίγωνα ἰσοσκελῶν τριγώνων: ἑνὸς μὲ σχέση πλευρῶν 3, 4, 5 ὡς πρὸς τὸ μήκος, πὺ ἔχει γωνίες 36, 54, 90, καὶ ἑνὸς ἄλλου μὲ γωνίες 18, 72 καὶ 90 μοιρῶν. Στὴν μὲν πρώτη περίπτωση πρόκειται γιὰ τὸ ἡμιτρίγωνο ἑνὸς ἐκ τῶν πέντε ἰσοσκελῶν τριγώνων τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου μὲ ἐπίκεντρη γωνία 72° καὶ παρὰ τὴ βάση 54° καὶ 54°, στὴ δὲ δευτέρη ἔχουμε τὸ ἡμιτρίγωνο τοῦ χρυσοῦ τριγώνου μὲ γωνίες 36°, 72° καὶ 72°. Ἐπομένως πρόκειται γιὰ τὸ ἡμιτρίγωνο μὲ γωνίες 18°, 72° καὶ 90°. Οἱ πλευρὲς τοῦ χρυσοῦ αὐτοῦ τριγώνου ἔχουν τὴ σχέση τοῦ ἄκρου καὶ μέσου λόγου, δηλαδή τῆς χρυσοῦς τομῆς ὅπως ἀπέδειξε μᾶλλον ὁ Θεαίτητος (Fr. Lassere 1964, 76) στὸ πεντάγωνο, διότι ἓνα τέτοιο τρίγωνο ἔχει πλευρὲς τὴ διαγώνιο καὶ τὴν πλευρὰ τοῦ πενταγώνου. Ἀντίθετα, ὁ Πρόκλος (1873: 419, Th. Heath 1956:99) ὑποστηρίζει ὅτι εἶναι Πυθαγορικῆς προέλευσης. Τὸ τρίγωνο αὐτὸ σχηματίζεται μὲ κορυφὴ τὴν ἐπίκεντρη γωνία τοῦ πενταγώνου καὶ βάση τὴν πλευρὰ του (Εὐκλείδης, Δ, ΙΑ, Μ. Livio, 2005, 118 - 20).

Τὸ ἐρώτημα πὺ προβάλλει τώρα εἶναι νὰ μάθουμε πῶς δημιουργοῦνται τὰ τρίγωνα αὐτὰ καὶ πόσα εἶναι. Ἄν ἐνώσουμε τὸ κέντρο τοῦ πενταγώνου, τὸ ὁποῖο ἀποτελεῖ τὴν βάση τοῦ δωδεκαέδρου, μὲ τὶς πέντε γωνίες του, τότε σχηματίζο-



νται πέντε ίσοσκελῆ τρίγωνα με γωνίες κορυφῆς 72° , δηλαδή μία ὀρθή παρὰ ἓνα πέμπτο καὶ βάσεων τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀρθῆς, δηλαδή 54° καὶ 54° . Ἡ γωνία τῶν 72° προκύπτει ἂν διαιρέσουμε τὸ 360° , δηλαδή τὸς τέσσερις ὀρθές, διὰ τοῦ πέντε, διότι τόσα εἶναι τὰ τρίγωνα, πὺ καλύπτουν ὁλόκληρη τὴν ἐπιφάνεια τοῦ πενταγώνου. Κάθε γωνία τοῦ πενταγώνου εἶναι 108° δηλαδή μιὰ ὀρθή καὶ ἓνα πέμπτο σύμφωνα με τὸν μαθηματικὸ τύπο $180^\circ(n-2)$, ὅπου n εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πενταγώνου, καὶ στὴ συγκεκριμένη περίπτωση εἶναι πέντε. Αὐτὸ ἔχει ἀποδειχθεῖ κατ' ἄλλο τρόπον ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη (XIII, IH, λήμμα). Ἔτσι ἔχουμε $(180^\circ(3) : 5 = 540 : 5 = 108$, πρᾶγμα πὺ ἀναφέρει καὶ ὁ Πλούταρχος (1003 D). Ἐπειδὴ ὁμως οἱ πλευρές τοῦ προαναφερθέντος τριγώνου εἶναι ταυτόχρονα καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, διότι εἶναι καὶ διάμεσοι τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ πενταγώνου, προκύπτει ὅτι οἱ παρὰ τὴν βάση γωνίες τοῦ τριγώνου αὐτοῦ εἶναι 54° . Ἀφοῦ τὸ κάθε πεντάγωνο σύγκεται ἀπὸ πέντε τέτοια ἴσοσκελῆ τρίγωνα, ἔπεται ὅτι τὸ δωδεκάεδρο περιέχει $60 (= 5 \times 12)$, γιὰ νὰ καλυφθεῖ ὅλη ἡ ἐπιφάνειά του, ὅπως ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη στὸ ἀνωτέρω λήμμα. Αὐτὰ εἶναι τὸ ἡμιτρίγωνο τοῦ ἴσοσκελοῦς αὐτοῦ τριγώνου με σχέση πλευρῶν 3, 4, 5 καὶ γωνίες 36° , 54° καὶ 90° . Συνεπῶς τὸ διπλάσιο τοῦ ἴσοσκελοῦς αὐτοῦ τριγώνου, πὺ ἐμπεριέχεται στὸ τετράγωνο, τὸ ὁποῖο σχηματίζεται ἀπὸ μιὰ πλευρὰ καὶ τὴν κάθετο σ' αὐτή, εἶναι ἴσο με τὸ τριακονταπλάσιο τῆς ἐπιφάνειας τοῦ δωδεκαέδρου κατὰ τὸν Ὑψικλῆ (Εὐ. Σπανδάγος 2002, 43 – 44).

Τὸ ἴσοσκελὲς αὐτὸ τρίγωνο τοῦ πενταγώνου ὑποδιαιρεῖται σὲ δύο ἡμιτρίγωνα με σχέση πλευρῶν 3, 4, 5. Ἄρα τὸ δωδεκάεδρο θὰ περιεῖχε $2 \times 5 \times 12 = 120$ τρίγωνα, πὺ θὰ ἦταν τὰ στοιχεῖα του. Αὐτὸ ὁμως δὲν ἀνταποκρίνεται πρὸς τὴν ἀλήθεια, διότι τὸ ἴσοσκελὲς αὐτὸ τρίγωνο διαιρεῖται κατὰ τοὺς ἀρχαίους σχολιαστὲς Πλούταρχο καὶ Ἀλκίνοο σὲ ἕξι πρῶτα, δηλαδή ὀρθογώνια τρίγωνα, ἐνῶ με τὴν διαίρεση αὐτὴ τὸ ἴσοσκελὲς θὰ ἀποτελοῦνταν μόνο ἀπὸ δύο πρῶτα,



δηλαδή ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἡ διαίρεση αὐτὴ τῶν σχολιαστῶν προκύπτει κατ' ἀναλογία ἀπὸ τὸ γεγονός ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου δὲν εἶναι δύο ἀλλὰ ἔξι (*Τίμ.*, 54c 2. Πβ. Γ. Κουμάκης 2014). Μὲ βάση τὸν ἀριθμὸ αὐτὸν ἀναφέρει ὁ Πλάτων ὅτι ἡ πυραμίδα ἀποτελεῖται ἀπὸ 24, τὸ ὀκτάεδρο ἀπὸ 48 καὶ τὸ εἰκοσάεδρο ἀπὸ 120 κάλλιστα τρίγωνα (*Τίμ.*, 55 a – b). Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὸ ὀρθογώνιο ἰσοσκελές. Τὸ τετράγωνο τῆς βάσης τοῦ κύβου δὲν σύγκειται ἀπὸ δύο ἀλλὰ ἀπὸ τέσσερα τρίγωνα, διότι τέσσερα εἶναι τὰ στοιχεῖα του. Γι' αὐτὸ ὁ κύβος κατὰ δήλωση τοῦ Πλάτωνα ἀπαρτίζεται ἀπὸ 24 καὶ ὄχι 12 ὀρθογώνια τρίγωνα, ἐπειδὴ μόνον μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν μποροῦν νὰ χαρακτηριστοῦν στοιχεῖα τοῦ τετραγώνου καὶ κατ' ἀκολουθίαν τοῦ κύβου ὅπως καὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου (*Τίμαιος Λοκρός*, 35. 98 c – d) καὶ κατὰ συνέπειαν τῶν τριῶν ἄλλων σωμάτων ἀντίστοιχα. Τὸ ἴδιο ἀκριβῶς συμβαίνει καὶ μὲ τὸ δωδεκάεδρο. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ἡμιτρίγωνο καὶ τὸ ἡμιτετράγωνο εἶναι στοιχεῖα. Συνεπῶς, τὸ καθένα ἀπὸ τὰ πέντε ἰσοσκελεῖ τρίγωνα μὲ γωνίες 72° , 54° καὶ 54° δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρεῖται μόνο σὲ δύο ἡμιτρίγωνα μὲ γωνίες 36° , 54° καὶ 90° , τὰ ὁποῖα θὰ ἀποτελοῦσαν τὰ στοιχεῖα τοῦ δωδεκάεδρου, διότι τότε αὐτὸ θὰ ἀποτελοῦνταν συνολικὰ ἀπὸ 120 τέτοια τρίγωνα, πρᾶγμα ποῦ ἀντιβαίνει στὶς μαρτυρίες τόσο τοῦ Πλουτάρχου ὅσο καὶ τοῦ Ἀλμπίνου ἢ Ἀλκίνοου, οἱ ὁποῖοι ἐπιβεβαιώνουν – ὅπως εἶδαμε – ὅτι τὸ δωδεκάεδρο συντίθεται ἀπὸ 360 τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ δωδεκάεδρου.

Γιὰ νὰ ἰσχυριστοῦμε λοιπὸν ὅτι τὸ δωδεκάεδρο σύγκειται ἀπὸ 120 καὶ ὄχι ἀπὸ 360 στοιχειώδη τρίγωνα, πρέπει πρῶτα νὰ ἀποδείξουμε ὅτι οἱ μαρτυρίες τῶν σχολιαστῶν αὐτῶν τοῦ *Τιμαίου* τοῦ Πλάτωνος εἶναι λανθασμένες.

Μέχρις ὅτου δηλαδή φέρουμε πειστικὰ ἐπιχειρήματα γιὰ τὴν ἀναίρεση τῶν θέσεών τους, πρέπει νὰ εἴμαστε ἐπιφυλακτικοὶ στὸ πρόβλημα αὐτό. Ἐκτὸς ὅμως ἀπὸ τὸ ἐμπόδιό του ἀριθμοῦ τῶν στοιχείων τοῦ δωδεκάεδρου, τὰ ὁποῖα κατὰ τὶς



άνωτέρω μαρτυρίες και εκτιμήσεις πρέπει να είναι 360 και όχι 120, υφίσταται καὶ ἓνα ἄλλο ἐπίσης σοβαρὸ καὶ σπουδαῖο κώλυμα νὰ ἀσπαστοῦμε τὴν ἐρμηνεῖα αὐτή. Εἶναι ἡ δήλωση τοῦ Πλουτάρχου ὅτι στὸ ἡμιτρίγωνο αὐτὸ τοῦ δωδεκαέδρου μὲ σχέση πλευρῶν 3, 4, 5, ἡ ὄρθια πλευρὰ τοῦ τριγώνου εἶναι 3, ἡ βάση 4 καὶ σὲ κάθε περίπτωση ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 5. Ἐὰν χωρίσουμε τὸ ἄνωτέρω ἰσοσκελὲς τρίγωνο τοῦ πενταγώνου μόνον σὲ δύο ἡμιτρίγωνα, ὥστε ὀλόκληρὸ το δωδεκάεδρο νὰ ἀποτελεῖται μόνον ἀπὸ 120 στοιχεῖα, τότε ἡ ὄρθια πλευρὰ κατ' ἀνάγκην εἶναι 4 καὶ ἡ βάση τρία. Πρόκειται συνεπῶς γιὰ μιὰ διάταξη, ἡ ὁποία εἶναι ἀντίθετη ἀπὸ αὐτήν, πὺν παραδίδει ὁ Πλούταρχος, ὁ ὁποῖος θέλει ἡ βάση νὰ εἶναι ἡ μεγαλύτερη κάθετη πλευρά, δηλαδή 4 καὶ ὄρθια πλευρὰ τρία (Πλούταρχος 373F – 374A). Ἄρα, ἡ ἐνδεχόμενη αὐτὴ ἐρμηνεῖα ἀποδεικνύεται ἀνεδαφικὴ καὶ λανθασμένη. Τὸ σπουδαιότερο ὡστόσο ἐπιχείρημα εἶναι τὰ κείμενα τοῦ ἴδιου τοῦ Πλάτωνα, ὁ ὁποῖος θέλει τὴ διαίρεση τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου σὲ ἕξι σκαληνὰ καὶ πιὸ συγκεκριμένα, ἡμιτρίγωνα ἰσοπλεύρου τριγώνου. Ὁ μαθηματικὸς Th. Heath ὑποστηρίζει ὀρθὰ κατὰ τὴν ἀντίληψή μου ὅτι ἡ σύνθεση τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀπὸ 6 καὶ ὄχι ἀπὸ 2 εἶναι Πυθαγορικῆς προέλευσης. Ἐπικαλεῖται συγκεκριμένα τὸν Πρόκλο, ὁ ὁποῖος λέγει ὅτι ὑπάρχει ἓνα θεώρημα τῶν Πυθαγορείων, σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖο, ἂν ληθοῦν ἕξι ἰσόπλευρα τρίγωνα ἢ τέσσερα τετράγωνα ἢ τρία ἑξάγωνα, συμπληρώνεται ὅλος ὁ τόπος γύρω ἀπὸ ἓνα σημεῖο, πὺν εἶναι τέσσερις ὀρθές, δηλαδή 360 μοῖρες, διότι ἡ γωνία τοῦ μὲν ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 60, τοῦ τετραγώνου 90 καὶ τοῦ ἑξάγωνου 120. Κατὰ συνέπεια σὲ ὅλες τὶς περιπτώσεις συμπληρώνονται οἱ τέσσερις ὀρθές γωνίες (Πρόκλος, 1873: 304-305). Τὸ θεώρημα αὐτὸ μνημονεύεται καὶ ἀπὸ τὸν Ἀριστοτέλη (*Περὶ οὐρανοῦ*, Γ 7, 306 b 3-8) καὶ τὸν Πάππο τὸν Ἀλεξανδρέα στὴν ἀρχὴ τοῦ Ε βιβλίου (Fr. Hultsch, 1878, Εὐ. Σπανδάγος 2004:14).

Ἐδῶ ὅμως δημιουργεῖται ἓνα πρόβλημα, τὸ ὁποῖο θὰ πρέπει νὰ



άντιμετωπιστεί. Συγκεκριμένα, με βάση το σκεπτικό αυτό της συμπλήρωσης του τόπου, δηλαδή των 360 μοιρών, θα έπρεπε κατ' αναλογία και με το ισοσκελές τρίγωνο με γωνίες 72, 54, 54, να μπορούσε επίσης να συμπληρωθούν οι 360 μοίρες. Σύμφωνα όμως με το παραπάνω θεώρημα δεν υπάρχει άλλο σχήμα εκτός από τα τρία αυτά, καθένα από τα οποία επαναλαμβανόμενο να συμπληρώνει όλον τον τόπο. Είναι ωστόσο δυνατόν κάθε μία από τις γωνίες του επαναλαμβανόμενη είτε μόνη της είτε με υποπολλαπλασισμό της να συμπληρώσει όλον τον τόπο των 360 μοιρών. Έτσι ή γωνία 72 μοιρών της κορυφής, αν επαναληφθεί 5 φορές, συμπληρώνει το ζητούμενο, αφού $72 \times 5 = 360$. Το ίδιο συμβαίνει, αν επαναληφθεί ή παρά τη βάση γωνία των 54 μοιρών έξι φορές και τα $\frac{2}{3}$ ή τα $\frac{6}{10}$ αυτής, δηλαδή γωνία 36 μοιρών. Έχουμε δηλαδή $54 \times 6 + 36 = 324 + 36 = 360$. Η εξάδα όμως, ή οποία αποτελεί τη βάση της αρμονίας, συμβολίζει τη ψυχή (Ίάμβλιχος 1922:43, 45, 47). Στον *Φαίδωνα* (94b) επίσης ή ψυχή ορίζεται ως αρμονία. Κατά τον Ίάμβλιχο (1922:14, 14-19) ή ψυχή χωρίζεται σε τρία διαστήματα, καθένα από τα οποία έχει δύο πέρατα. Από αυτό εξάγεται το συμπέρασμα ότι ή ψυχή συνίσταται από τον αριθμό 6. Βλέπουμε εδώ ότι ο τρόπος σχηματισμού της εξάδας της ψυχής συμπίπτει απόλυτα με τον τρόπο σύνθεσης του ισοπλεύρου τριγώνου $3 \times 2 = 6$ (Τίμ., 54 d). Από τη στιγμή λοιπόν που είναι δεδομένο ότι το ισόπλευρο τρίγωνο διαιρείται σε έξι πρώτα τρίγωνα, πρέπει το ίδιο να συμβαίνει και με το ισοσκελές. Οφείλομε συνεπώς να αναζητήσουμε άλλον τρόπο διαίρεσης, με τον οποίο ενδεχομένως θα δημιουργηθούν και άλλα τρίγωνα ως στοιχεία του δωδεκαέδρου. Με βάση έναν απλό συλλογισμό πρέπει να αναμένουμε ότι το δωδεκάεδρο πρέπει να αποτελείται από δύο και όχι από ένα είδος στοιχείων, επειδή τα τέσσερα σχήματα, που αντιστοιχούν στα κάλλιστα σώματα, αποτελούνται από δύο διαφορετικά είδη τριγώνων, και συγκεκριμένα αφενός μεν από το ήμιτρίγωνο ισοπλεύρου



τριγώνου, ἀφετέρου δὲ τὸ ἡμιτετράγωνο. Στὸ δωδεκάεδρο βέβαια, ὅπως θὰ δοῦμε, δὲν χρησιμοποιεῖται κανένα ἀπὸ αὐτὰ τὰ τρίγωνα, ἀλλὰ δύο διαφορετικὰ εἶδη ἡμιτριγώνων. Τὸ ἓνα ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ ἡμιτρίγωνο ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ γωνίες 72° , 54° καὶ 54° , τὸ δὲ ἄλλο εἶναι τὸ ἡμιτρίγωνο τοῦ χρυσοῦ τριγώνου μὲ γωνίες 36° , 72° καὶ 72° , στὸ ὁποῖο οἱ παρὰ τὴ βάση γωνίες εἶναι διπλάσιες ἀπὸ ἐκείνη τῆς κορυφῆς. Οἱ δύο πλευρὲς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ βρίσκονται σὲ λόγῳ τῆς χρυσοῦς τομῆς.

Τὸ ἐρώτημα εἶναι τώρα πῶς δημιουργοῦνται τὰ ἕξι αὐτὰ τρίγωνα, ποὺ εἶναι στοιχεῖα τοῦ δωδεκαέδρου. Ἄν σὲ ἓνα ἀπὸ τὰ πέντε ἰσοσκελεῖ τρίγωνά του πενταγώνου μὲ γωνίες 72° , 54° , 54° φέρουμε τὰ τρία ὕψη, τότε σχηματίζονται ἕξι τρίγωνα μὲ τὶς ιδιότητες ποὺ εἶπαμε παραπάνω, δηλαδὴ τέσσερα ἡμιτρίγωνά του ἰσοσκελοῦς αὐτοῦ τριγώνου, τὰ ὁποῖα ἔχουν γωνίες 36° , 54° , 90° ἀνὰ δύο ἴσα καὶ ὅμοια, ἀλλὰ ἄνισα πρὸς τὰ ἄλλα δύο καὶ μάλιστα μὲ λόγῳ 3, 618. Σχηματίζονται ἐπίσης δύο ἴσα καὶ ὅμοια ἡμιτρίγωνα τοῦ χρυσοῦ τριγώνου μὲ γωνίες 18° , 72° , 90° . Τὸ τρίγωνο αὐτὸ ὡς πρὸς τὸ μικρότερο ἄλλο ἡμιτρίγωνο ἔχει λόγῳ 2, 22 καὶ ὡς πρὸς τὸ μεγαλύτερο 1, 618 δηλαδὴ τοῦ ἄκρου καὶ μέσου λόγου, μὲ ἄλλα λόγια τῆς χρυσοῦς τομῆς. Τὰ ὕψη ὅμως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ποὺ σχηματίζεται ἀκτινωτὰ μὲ πλευρὲς ἀπὸ τὸ κέντρο πρὸς τὶς γωνίες τοῦ πενταγώνου, συμπίπτουν μὲ τὶς διαγώνιες τοῦ ἴδιου. Τὰ στοιχεῖα λοιπόν, ἀπὸ τὰ ὁποῖα συντίθεται τὸ δωδεκάεδρο εἶναι 360 ὀρθογώνια ἡμιτρίγωνα, τὰ ὁποῖα λέγονται καὶ πρῶτα ἢ ἀρχοειδή, ἐπειδὴ ἀπὸ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὸ σκαληνὸ καὶ τὸ ἰσοσκελές, σχηματίζονται ὅλα τα τρίγωνα καὶ ἐπομένως καὶ τὰ ἐπίπεδα σχήματα κατὰ Πλάτωνα (*Τίμ.*, 53 c8 – d3: «τὰ δὲ τρίγωνα πάντα ἐκ δυοῖν ἄρχεται τριγώνοιν, μίαν μὲν ὀρθὴν ἔχοντος ἑκατέρου γωνίαν, τὰς δὲ ὀξείας»). Οἱ ἀποδείξεις παρατίθενται ἀπὸ μαθηματικοὺς στὰ σχεδιαγράμματα.

Τὸ μαθηματικὸ αὐτὸ συμπέρασμα συμπίπτει ἀπόλυτα – ὅπως εἶδαμε – μὲ τὴ



μαρτυρία του Πλουτάρχου – ο οποίος λέγει (1003D) ότι το δωδεκάεδρο είναι συναρμοσμένο από δώδεκα πεντάγωνα ισογώνια και ισόπλευρα, έκαστον τῶν ὁποίων συνίσταται ἀπὸ τριάντα πρῶτα σκαληνὰ τρίγωνα. Ἀναγκαῖο ἐπακόλουθο τῆς διαπίστωσης αὐτῆς τοῦ Πλουτάρχου εἶναι ὅτι τὸ δωδεκάεδρο σύγκειται ἀπὸ 360 τρίγωνα, ἀφοῦ αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ δώδεκα πεντάγωνα $360 = 30 \cdot 12$. Μὲ βάση τὸν σιωπηρὸ αὐτὸν συλλογισμόν ὁ Πλούταρχος προβαίνει ἐν συνεχείᾳ στὴ δήλωση ὅτι ἡ σύνθεσις τοῦ κόσμου ἀπὸ 360 τρίγωνα εἶναι ἀπομίμησις τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου καὶ ταυτόχρονα τοῦ ἔτους, διότι καὶ στίς δύο περιπτώσεις ἔχουμε τὸν ἀριθμὸν 12, ὁ ὁποῖος ὑποδιαιρεῖται σὲ 30 μέρη (1003D). Πράγματι ὁ ζωδιακὸς κύκλος διαιρεῖται σὲ 12 ζώδια, δηλαδὴ μέρη, καὶ τὸ κάθε ζώδιον ἔχει 30 μοῖρες. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνες καὶ κάθε μῆνας ἔχει 30 μέρες. Κατὰ τὸν Διογένη τὸ Λαέρτιο (I, 27) ὁ Θαλῆς βρῆκε τίς ἐποχὰς καὶ τοὺς μῆνας τοῦ ἔτους, τὸ ὁποῖο διαίρεσε σὲ 365 ἡμέρας. Ὁ Πλούταρχος ὀνομάζει τὰ 24 τρίγωνα τῆς πυραμίδας ἐπίσης πρῶτα (32, 427a). Ἀπ’ αὐτὸ θὰ μπορούσε νὰ συμπεράνει κανεὶς ὅτι ὅλα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι πρῶτα. Ἡ ἰδέα αὐτὴ τῆς ἀπομίμησις τῆς μαθηματικῆς δομῆς τοῦ κόσμου (μὲ τὰ 360 τρίγωνα τοῦ δωδεκαέδρου) τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου τονίζεται ἐπίσης ἀπὸ τὸν Ἀλμπίνο στὴν *Ἐπιτομή* του (77) ἢ κατ’ ἄλλην παραλλαγή ἀπὸ τὸν Ἀλκίνοο στὸν *Διδασκαλικόν* του (XIII, 169). Εὐστοχα ἔχει παρατηρηθεῖ ἀπὸ τοὺς σχολιαστὰς ὅτι ὁ παραλληλισμὸς καὶ ἡ συσχέτισις τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸν ζωδιακὸν κύκλον καὶ τὸν ἐνιαυτὸν εἶναι ἀπλῶς ἀριθμητικὸς (H. Cherniss 1976, 55). Αὐτὸ ποὺ δηλώνει ἐδῶ ὁ Πλούταρχος εἶναι ὅτι τὰ 360 τρίγωνα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα συντίθεται τὸ δωδεκάεδρον, εἶναι πρῶτα καὶ σκαληνά. Ὁ ὅρος «πρῶτα» σημαίνει ὀρθογώνια, διότι μόνον αὐτὰ μποροῦν νὰ εἶναι στοιχεῖα, δηλαδὴ ἀρχὲς τῶν ἄλλων τριγώνων καὶ γενικότερα σχημάτων, ὅπως εἶδαμε καὶ προηγουμένως (*Τίμ.*, 53 c8 – d2). Γιὰ νὰ τὸ ἀντιδιαστείλει ἀπὸ τὸ ἄλλο σκαληνόν, δηλαδὴ τὸ ἡμιτρίγωνον



ισοπλεύρου τριγώνου, λέγει ότι τὸ στοιχείο τοῦ δωδεκαέδρου δὲν εἶναι ἐκεῖνο τὸ σκαληνόν, ἀπὸ τὸ ὁποῖο ὁ Πλάτων συνιστᾷ τὴν πυραμίδα, τὸ ὀκτάεδρο καὶ τὸ εἰκοσάεδρο (428A).

Ἐπιφανεῖς ἐρμηνευτὲς καὶ σχολιαστὲς τοῦ Πλάτωνα διερωτῶνται καὶ ἐκφράζουν τὴν ἀπορία τους γιὰ τὸ ὅτι οὔτε ὁ Ἀλμπίνος οὔτε ὁ Πλούταρχος μᾶς λένε τί εἶδους τρίγωνο εἶναι αὐτό, πὺ συγκροτεῖ τὸ δωδεκάεδρο. Ὁ Ἀλμπίνος δὲν κάνει καμιά ἀπολύτως διασάφηση καὶ δὲν δίνει κανένα εὐκρινέστερο προσδιορισμό. Ἀπεναντίας, ὁ Πλούταρχος παρέχει τρία στοιχεῖα τῆς ταυτότητάς του: 1) ὅτι αὐτὰ εἶναι πρῶτα, δηλαδὴ ὀρθογώνια, 2) σκαληνὰ καὶ 3) δὲν εἶναι τὰ σκαληνὰ ἐκεῖνα, μὲ τὰ ὁποῖα ὁ Πλάτων συνθέτει τὴν πυραμίδα, τὸ ὀκτάεδρο καὶ τὸ εἰκοσάεδρο. Δὲν προσδιορίζει ὅμως ἐπακριβῶς ποιὸ ἢ ποιὰ εἶναι τὰ τρίγωνα αὐτά, ἂν εἶναι δηλαδὴ ἓνα ἢ δύο καὶ ποιὲς εἶναι οἱ διαστάσεις τους. Ἐπειδὴ ὁ Πλούταρχος δὲν ἦταν σαφὴς γιὰ ἄγνωστο λόγο, τὰ λόγια τοῦ παρεξηγήθηκαν καὶ παρερμηνεύτηκαν. Γι' αὐτὸ δέχτηκε ποικίλες ἐπιθέσεις ἄλλοτε μὲ ἥπιο καὶ ἄλλοτε μὲ σφοδρὸ τόνο. Τὸ γενικὸ συμπέρασμα τῶν ἐπικριτῶν εἶναι ὅτι ἡ ἄποψή του εἶναι λανθασμένη καὶ ὅτι δὲν κατανόησε τὰ λόγια τοῦ Πλάτωνα. Τὸ περίεργο καὶ ἄδικο στὴν ὅλη ὑπόθεση εἶναι ὅτι ὀρισμένοι ἀπ' αὐτοὺς νόμισαν ὅτι ὁ Πλούταρχος μὲ τίς φράσεις του «πρῶτα τρίγωνα», «ἡμιτρίγωνα» καὶ «σκαληνὰ» τρίγωνα ἐννοοῦσε μᾶλλον τὸ ἡμιτρίγωνο ἰσοπλεύρου τριγώνου, πὺ χρησιμοποίησε ὁ Πλάτων στὴν κατασκευὴ τῶν τριῶν σχημάτων, πὺ ἀντιστοιχοῦν στὴ φωτιά, τὸν ἀέρα καὶ τὸ νερό, παρόλο πὺ ὁ ἴδιος ὁ Πλούταρχος – ὅπως εἶδαμε – ἀντιδιαστέλλει ρητὰ τὰ τρίγωνα τοῦ δωδεκαέδρου ἀπὸ τὸ ἡμιτρίγωνό του ἰσοπλεύρου τριγώνου. Ὅρισμένοι ἐρμηνευτὲς ὡστόσο ἔκαμαν αὐτὸ τὸ ἀτόπημα ὅπως ὁ Stallbaum (1861). Οἱ ἀξιολογότεροι ἐπικριτὲς τοῦ Πλουτάρχου εἶναι ὁ R. Archer – Hind (1888, 197), ὁ Th. Martin (1976, 246-247), ὁ H. Cherniss (1976: 54, σημ. α) καὶ ὁ Th. Heath (1931: 177-8, 1921: 236-



7, 1956, 98-9). Ο εξαιρετός αυτός μαθηματικός υποστηρίζει στα ίδια σημεία των έργων του ότι το τρίγωνό του δωδεκάεδρου είναι το χρυσό τρίγωνο, δηλαδή εκείνο, στο οποίο οι παρά τη βάση γωνίες είναι διπλάσιες από εκείνη της κορυφής. Το τρίγωνο αυτό έχει τη γωνία κορυφής 36° και παρά τη βάση 72° , 72° . Έχει δηλαδή κορυφή τη γωνία και πλευρές τη διαγώνιο και πλευρά του πενταγώνου, το οποίο εγγράφεται σε κύκλο (Ευκλείδης, IV. 19). Λέγεται πεντάλφα (star-pentagon), επειδή πέντε τέτοια τρίγωνα σχηματίζονται στο πεντάγωνο. Για τους Πυθαγόρειους το τρίγωνο αυτό συμβόλιζε την «Υγεία», οι δέ πλευρές του έχουν το λόγο της χρυσής τομής, αφού σχηματίζεται από την πλευρά και τη διαγώνιο του πενταγώνου. Αυτό αποδεικνύεται μὲν ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη (II IA), φαίνεται νὰ εἶναι ὡστόσο Πυθαγορικῆς προελεύσεως κατὰ τὴ μαρτυρία τοῦ Πρόκλου (1873: 419, Th. Heath 1956:99). Ἡ λύση αὐτὴ τοῦ Heath, παρόλο πὸς δηλώνει ὀξύνοια καὶ ἐμβάθυνση, δὲν μπορεῖ νὰ ἀνταποκρίνεται στὸ πνεῦμα τοῦ Πλάτωνα γιὰ πολλοὺς λόγους. Ἐνας ἀπ' αὐτοὺς εἶναι ὅτι τὰ πεντάλφα, ἐκτός του ὅτι ἀλληλοεπικαλύπτονται, δὲν περιλαμβάνουν ὅλην τὴν ἐπιφάνεια τοῦ πενταγώνου καὶ κατὰ συνέπεια τοῦ δωδεκάεδρου. Αὐτὴ ὅμως πρέπει νὰ καλυφθεῖ, γιὰ νὰ μποροῦν νὰ μετρηθοῦν ἢ ἴδια, οἱ ὄγκοι, καὶ τὸ βᾶρος τῶν σωμάτων, ὥστε νὰ δημιουργηθοῦν κριτήρια γιὰ τὶς ἀναλογίες καὶ συμμετρίες μεταξύ τους (Τίμ., 32 c2, 54 c4). Ἐπιπλέον δὲν συμπληρώνονται 360 τρίγωνα πὸς προσδιορίζουν οἱ σχολιαστὲς οὔτε ἐμφανίζεται τὸ τρίγωνο μὲ σχέση πλευρῶν 3, 4, 5 μὲ τὸ ὅποιο ὁ Πλάτων λέγει στὴν *Πολιτεία* του (H, 548b) ὅτι αὐτὸ χρησιμοποιήθηκε γιὰ τὴ θεία καὶ τὴν ἀνθρώπινη γέννηση. Τὸ θεῖον γεννητὸν τῆς *Πολιτείας* εἶναι ὁ κόσμος. Μὲ τὸ τρίγωνο αὐτό, ὅπως ἀναφέρει ὁ Πλούταρχος, παρίσταναν οἱ Αἰγύπτιοι τὸν κόσμον, τὸ χρησιμοποίησε δὲ καὶ ὁ Πλάτων κατὰ τὴ σύνταξη τοῦ γαμήλιου διαγράμματος (373F). Ἔτσι τὸ ἀντιλαμβάνεται καὶ ὁ Πρόκλος (1901, 14-19, 30, 31), δηλαδή τὸ «θεῖον γεννητὸν» εἶναι ὁ κόσμος. Κρίνω ὅτι ἡ



ὀρθότερη λύση ἢ ἡ μόνη ὀρθή εἶναι ἐκείνη τοῦ Εὐκλείδη (XIII, 18, λήμμα), ὁ ὁποῖος παρατάσσει πέντε ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα καλύπτουν ὅλη τὴν ἐπιφάνεια τοῦ πενταγώνου.

Ὁ μαθηματικὸς G. Cantor παρατήρησε ὅτι ἡ διαίρεση ἢ διάλυση τοῦ πενταγώνου σὲ τρίγωνα ἐπιτυγχάνεται, ἂν φέρουμε ἀπὸ κάθε κορυφή τὴ μεσοκάθετο στὴν ἀπέναντι πλευρὰ καὶ ὅλες τὶς διαγώνιες. Οἱ γωνίες τῶν τριγώνων ποὺ σχηματίζονται εἶναι 36°, 72°, 72° καὶ 36°, 54°, 90° καὶ βρίσκονται ἀκτινωτὰ ἀπὸ τὸ κέντρο (Cantor 1892. II: 177, R. Herz – Fischler, 1988: 83). Ἡ διαίρεση αὐτὴ συνεπάγεται ὅτι σχηματίζονται καὶ τρίγωνα μὲ γωνίες 18°, 72° καὶ 90°, ποὺ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ χρυσοῦ τριγώνου καὶ τρίγωνα μὲ γωνίες 72°, 54°, 54°, ποὺ εἶναι τὰ πέντε ἰσοσκελῆ μὲ γωνία κορυφῆς τὸ κέντρο τοῦ πενταγώνου. Μὲ τὴ διαίρεση αὐτὴ τοῦ Cantor, τὴν ὁποία ἀκολουθεῖ καὶ ὁ Th. Heath (1956: 98), τὸ κάθε ἰσοσκελὲς τρίγωνο μὲ γωνίες 72°, 54°, 54° διαιρεῖται σὲ ἕξι ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἡμιτρίγωνα, τὸ μὲν ἓνα τοῦ χρυσοῦ τριγώνου, τὸ δὲ ἄλλο τοῦ ἀνωτέρω ἰσοσκελοῦς. Τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ εἶναι τὸ Πυθαγορικὸ μὲ σχέση πλευρῶν 3, 4, 5, ἀφοῦ ἡ μεγαλύτερη κάθετη πλευρὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς μικρότερης κάθετης πλευρᾶς καὶ τῆς ὑποτείνουσας. Πρόκειται γιὰ ἐκεῖνο ποὺ δὲν εἶναι ἀλλὰ πλησιάζει τὸ ὀρθογώνιο χρυσοῦ τρίγωνο. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ τετράγωνο τῆς μεγαλύτερης κάθετης πλευρᾶς ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσα καὶ τὴ μικρότερη κάθετη πλευρὰ. Ἄν δηλαδὴ α = ὑποτείνουσα, β = μεγαλύτερη κάθετη πλευρὰ καὶ γ = μικρότερη κάθετη πλευρὰ, τότε ἔχουμε $\beta^2 = \alpha\gamma$ (Σπανδάγος 2004^α: 21-25). Στὸ τρίγωνο δηλαδὴ μὲ πλευρὲς 3, 4, 5, $4^2 = 3 \cdot 5 = 16 = 15$. Αὐτὰ εἶναι κατὰ προσέγγιση ἴσα, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι οἱ πλευρὲς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ ἔχουν περίπου τὸ λόγο τῆς χρυσοῦς τομῆς. Ἐδῶ πρέπει νὰ σημειωθεῖ ὅτι – ὅπως παραδίδεται ἀπὸ τοὺς σχολιαστὲς – ὁ Πλάτων βρῆκε τὴ μέση ἀνάλογο (L. Westerink 1990: 5.17-18, γ. 8): «Μαθηματικὰ δὲ εὗρεν τὴν



μέσην καλουμένην ανάλογον»).

Τὸ πέμπτο σῶμα, ὁ αἰθέρας, ἀναφέρεται συστηματικὰ γιὰ πρώτη φορὰ στὴν *Ἐπινομίδα* (981 b – c, 984 b c). Ὁ πιὸ πιστὸς μαθητὴς τοῦ Πλάτωνα Ξενοκράτης μαρτυρεῖ ὅτι τὸ πέμπτο σχῆμα ἀποδίδεται στὸ πέμπτο σῶμα, ποὺ εἶναι ὁ αἰθέρας (H. Diels 1895: 1165: «διαϊρῶν ... ἃ δὴ πέντε σχήματα καὶ σώματα ὠνόμαζεν, εἰς αἰθέρα καὶ πῦρ καὶ ὕδωρ καὶ γῆν καὶ ἀέρα· ὥστε ὁ αἰθὴρ πέμπτον ἄλλο τί σῶμα ... παρὰ τὰ τέτταρα στοιχεῖα»). Τὸ ἐρώτημα ποὺ προβάλλει στὴ συνέχεια εἶναι γιὰτί ὁ Πλάτων δὲν παρουσίασε στὸν *Τίμαιο* ὅλα τα σώματα, δηλαδὴ καὶ τὰ πέντε, ἀλλὰ πραγματεύτηκε τὸ πέμπτο στὸ τελευταῖο συστηματικὸ τοῦ ἔργο, ποὺ εἶναι ἡ *Ἐπινομίς*. Πρέπει βέβαια ἐδῶ νὰ σημειωθεῖ ὅτι - ὅπως ἀπέδειξε ὁ Εὐκλείδης- (XIII, 18) ὑπάρχουν μόνο αὐτὰ τὰ πέντε ἰσογώνια καὶ ἰσόπλευρα σχήματα, δηλαδὴ κανονικὰ πολύεδρα.

Σὲ ἄλλη μου ἐργασία προσπάθησα νὰ δείξω ὅτι ἡ *Ἐπινομίς* εἶναι ὁ *Φιλόσοφος*, τὸν ὁποῖο εἶχε ὑποσχεθεῖ ἤδη στὸν *Σοφιστὴ* (217a 3, 254b 3-5) καὶ τὸν *Πολιτικὸ* (257 α-β) ὅτι θὰ ἔγραφε (Γ. Κουμάκης 2013, 2014α).

Τὸ ὅτι ὁ Πλάτων χρησιμοποιοῦ ἔντονα τὴ χρυσοῦ τομὴ στὸ δωδεκάεδρο ἐκτὸς ἀπὸ τὸ χρυσοῦ τρίγωνο, στὸ ὁποῖο αὐτὴ εἶναι ἐμφανής, παρατηροῦμε ὅτι καὶ στὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ἔχουμε τὸν χρυσοῦ λόγο. Γιὰ παράδειγμα τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἡμιτριγώνων τοῦ χρυσοῦ τριγώνου (3,592) πρὸς τὸ μεγαλύτερο ὀρθογώνιο τρίγωνο (5, 812) ἔχουν τὸν χρυσοῦ λόγον τῆς χρυσοῦ τομῆς, δηλαδὴ 1, 618. Ὁ ὁρατὸς αὐτὸς κόσμος ὡς εἰκόνα τοῦ νοητοῦ εἶναι ἓνας καὶ «μονογενής, μέγιστος, ἄριστος κάλλιστος καὶ τελειώτατος» (*Τίμ.*, 92c 5 – 9). Ὁ ὁρατὸς καὶ ἀπτὸς κόσμος εἶναι μὲν εἰκόνα τοῦ νοητοῦ, ἀλλὰ καὶ τὸ δωδεκάεδρο εἶναι εἰκόνα τοῦ ὁρατοῦ (*Τίμαιος Λοκρὸς*, 98 d – e). Μὲ τὴν ἄποψη αὐτὴ παρουσιάζεται στενὴ σχέση καὶ συγγένεια πρὸς τὴν τετμημένην γραμμὴν τῆς Πολιτείας, ὅπου τα εἴδωλα εἶναι εἰκόνα τῆς εἰκόνας (ΣΤ 509 d κ. ἐξ. πβ. G. Koumakis, 2010-11).



Ἄς δοῦμε τώρα πῶς ἀπὸ τὶς μαθηματικὲς αὐτὲς διεργασίες προκύπτει ἡ διαλεκτική, οἱ κύριες μορφὲς τῆς ὁποίας εἶναι ἀφενὸς μὲν ἡ ὑπόθεση ἀφετέρου δὲ ἡ σύνθεση καὶ ἡ διαίρεση. Ἡ ὑπόθεση εἶναι ἐμφανὴς στὸν *Τίμαιο*, ἀφοῦ ὁ λόγος ἢ ὁ μῦθος εἶναι εἰκῶς, δηλαδὴ πιθανὸς (29 d 2, 48 d 2, 53 d 5 - 6). Ὅταν ὁ Πλάτων ἀρχίζει τὴ συναρμολόγησι τοῦ κόσμου μὲ τὰ κάλλιστα τρίγωνα χρησιμοποιεῖ ἐκφράσεις, πὺ παραπέμπουν σὲ ὑποθέσεις ὅπως *ὑποτιθέμεθα* (53d 5), *προαιρετέον*, *τιθέμεθα* κ.τ.λ. (54 a). Ἡ δευτέρα κύρια μορφή τῆς διαλεκτικῆς εἶναι ἡ σύνθεση καὶ ἡ διαίρεση, ἡ ὁποία κυριαρχεῖ ἔντονα στοὺς ὕστερους διαλόγους καὶ κυρίως στὸν *Σοφιστὴ* καὶ τὸν *Πολιτικό*. Ὁ Πλάτων συνθέτει μὲ στοιχειώδη τρίγωνα τὶς βάσεις τῶν πέντε καλλίστων σχημάτων πὺ εἶναι στοιχεῖα καὶ εἰκόνες τῶν σωμάτων, τὰ ὁποῖα μὲ τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦν νὰ διαιρεθοῦν. Ἡ διαίρεση αὐτὴ πρέπει νὰ εἶναι κατ' εἶδη καὶ ὄχι κατὰ μέρη. Ἄς παρατηρήσουμε στὴ συνέχεια πῶς γίνεται ἡ κατ' εἶδη αὐτὴ διαίρεση. Τὰ τρίγωνα χωρίζονται σὲ ὀρθογώνια καὶ μὴ ὀρθογώνια. Τὰ τρίγωνα, μὲ τὰ ὁποῖα δομεῖται ὁ κόσμος, εἶναι ὀρθογώνια, μποροῦν δὲ νὰ εἶναι εἴτε ἡμιτετράγωνα, δηλαδὴ ὀρθογώνια ἰσοσκελῆ, εἴτε ἡμιτρίγωνα. Τὰ τελευταῖα ὑποδιαιροῦνται πάλι σ' ἐκεῖνο 1) τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ 2) ἰσοσκελοῦς. Τὸ ἰσοσκελὲς ὑποδιαιρεῖται πάλι εἴτε σ' ἐκεῖνο μὲ γωνίες 72°, 54°, 54°, εἴτε σ' ἐκεῖνο μὲ γωνίες 36°, 72°, 72°. Ἡ γωνία δηλαδὴ τῆς κορυφῆς τοῦ δευτέρου εἶναι ἡμίσεια ἀπὸ ἐκείνη τοῦ πρώτου. Ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ ἰσοσκελῆ λαμβάνομε κάθε φορά τὸ ἥμισυ. Στὴ μὲν πρώτη περίπτωση ἔχουμε τὸ Πυθαγορικὸ (Iamblichus 1922: 50) τρίγωνο μὲ γωνίες 36°, 54°, 90°, στὸ ὁποῖο οἱ τρεῖς πλευρὲς ἔχουν περίπου τὸν λόγο τῆς χρυσοῦς τομῆς. Στὴ δὲ δευτέρα προκύπτει τὸ ἥμισύ του χρυσοῦ τριγώνου μὲ γωνίες 18°, 72°, 90°. Μὲ τὸ σκαληνὸ ἡμιτρίγωνο κατασκευάζονται τὰ τέσσερα σχήματα καὶ μὲ τὸ ἡμιτετράγωνο ὁ κύβος. Ἄς σημειωθεῖ ἐδῶ ὅτι τὸ ἡμιτρίγωνο, ἐπειδὴ ἐμπεριέχει τὸ ἥμισυ, ἐνέχει τὴν ἔννοια τῆς συμμετρίας (*Πολιτ.*, Z 530 a



1).

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ Πλάτων μιλάει πρωτίστως γιὰ τὴ σύνθεση τῶν σωμάτων, ὀφείλουν καὶ οἱ ἑρμηνευτὲς νὰ ἀκολουθήσουν πιστὰ τὸν ἴδιο δρόμο. Ὁ τρόπος σύνθεσης τῶν βάσεων τοῦ δωδεκαέδρου παρέχεται ἀπὸ τοὺς μαθηματικούς, ποὺ εἶχαν τὴν εὐγενῆ καλοσύνη νὰ βοηθήσουν στὸ ἔργο μὲ ἀγαστὴ συνεργασία. Τοὺς ὀφείλω θερμὲς εὐχαριστίες. Δὲν πρέπει δηλαδὴ νὰ ἀρχίσουμε ἀπὸ τὴ διαίρεση, ὅπως ἔχει ἐπιχειρηθεῖ μέχρι σήμερα ἀπὸ τοὺς σχολιαστὲς, ἀλλὰ ἀπὸ τὴ σύνθεση ἀκολουθοῦντες τὶς ὑποδείξεις τοῦ Πλάτωνα. Μὲ ποῖο τρόπο μεταβαίνομε ἀπὸ τὸ Πυθαγορικὸ τρίγωνο μὲ σχέση πλευρῶν 3, 4, 5, στὸ ὁποῖο ἡ βάση εἶναι ἡ μεγαλύτερη κάθετη πλευρὰ 4 καὶ ὕψος ἡ μικρότερη, 3, (ὥστε νὰ συμπληρώνονται τὰ τρία στοιχειώδη τρίγωνα), στὸ μεγαλύτερο ὁμοῖό του, τεκμηριώνεται ἀπὸ τοὺς μαθηματικούς. Αὐτὸ ποὺ ἐννοῶ εἶναι πῶς ἀπὸ τὸ τρίγωνο ΓΗΖ μεταβαίνομε στὸ ΑΓΖ στὸ σχῆμα 4. Πῶς τώρα μεταβαίνομε ἀπὸ τὸ προαναφερθὲν τρίγωνο ΑΓΖ τοῦ σχήματος 4 στὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΓΒ μὲ γωνίες 72° , 54° , 54° τοῦ σχήματος 3 μᾶς ἐξηγεῖ ὁ Πρόκλος (1901: 43, 15 - 19, πβ. A. J. Festugiere 1970: II, 150). Λέγει συγκεκριμένα ὅτι αὐτὸ ἐπιτυγχάνεται ἂν προεκτείνουμε τὴ μικρότερη κάθετη πλευρὰ (ΓΖ) σὲ ἴσο μῆκος, δηλαδὴ ἂν τὴ διπλασιάσουμε καὶ ἐνώσουμε τὸ ἄκρον τῆς μὲ τὴν κορυφὴ τοῦ τριγώνου, δηλαδὴ τοῦ σημείου Β τῆς ΖΒ μὲ τὸ Α. Ἄν τώρα ἐνώσουμε πέντε τέτοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα μὲ κέντρο τὴ γωνία 72° , τότε σχηματίζεται τὸ πεντάγωνο, ἀφοῦ καλύπτεται ὅλη ἡ ἐπιφάνειά του. Τὴ λύση αὐτὴ ἔδωσε ὁ Εὐκλείδης (XIII, 18, λήμμα).

Πρέπει τέλος νὰ σημειωθεῖ ὅτι στὴν *Πολιτεία* (ΣΤ 509 c – 511 d) μὲ τὰ μαθηματικά, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὴ διάνοια, μπορεῖ ἐπίσης νὰ γίνῃ διαλεκτικὴ, ἡ ὁποία ἀνήκει στὸ ἀνώτατο μέρος τετμημένης γραμμῆς, ποὺ ἀναφέρεται στὴν ἐπιστήμη καὶ τὸν νοῦ, ἀφοῦ αὐτὰ εἶναι ιδέες (510 d 7) καὶ νοητὰ μετὰ ἀρχῆς



(511 d 2. Πβ. Fr. Cornford 1965: 63). Οι ιδέες που ζητούμε δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἰδωθοῦν κατ' ἄλλον τρόπο παρὰ μόνον μὲ τὴν διάνοια (511 a). Μὲ τὴ διαλεκτικὴ ὅμως κατὰ Πλάτωνα, εἴτε μὲ τὴ μορφή τῆς ὑπόθεσης εἴτε τῆς σύνθεσης καὶ τῆς διαίρεσης, κατακτοῦμε τὴ γνώση (*Φαίδ.* 99 c - d, 101 d - e. Πβ. Koumakis 2000). Εἶναι λοιπὸν ἐπιτακτικὴ ἀνάγκη νὰ βροῦμε ἐπακριβῶς τὸν ἀριθμὸ καὶ τὴν ταυτότητα τῶν καλλίστων τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὶς ἀρχὲς καὶ τὰ αἷτια σύνθεσης τῶν 5 σχημάτων, γεννητόρων τῶν 5 καλλίστων σωμάτων. Ἀπὸ τὰ τρίγωνα συντελεῖται ἢ τοῦ ὅλου γένεση λέγει ὁ Ἰάμβλιχος (1922: 87). Μόνον ἂν γνωρίσουμε τὶς ἀρχὲς καὶ τὰ αἷτια, δημιουργοῦμε τὶς ἀναγκαῖες προϋποθέσεις τῆς γνώσης κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη (*Φυσ. Α.*, 1, 184 a 10-14, B 3, 194 b 16-17, *Μ.τ.φ.*, A3, 993 a 23-26). Ἀλλὰ καὶ ὁ Πλάτων τονίζει στὸν *Φίληβο* (17 a 23) ὅτι ἡ διαφορὰ τῆς ἐριστικῆς ἀπὸ τὴ διαλεκτικὴ ἔγκειται στὸ ὅτι ἡ μὲν ἐριστικὴ μεταβαίνει ἀπὸ τὸ ἓνα εὐθὺς στὸ ἄπειρο, ἐνῶ ἡ διαλεκτικὴ ἐπιδιώκει τὸ μεταξὺ καὶ τὸ μέσον. Προσπαθεῖ δηλαδὴ νὰ καθορίσει ποῖα καὶ πόσα εἶναι. Ἡ διαλεκτικὴ ἀκολουθεῖ τὸ μέσον τῶν 2 ἄκρων (*Πολιτικ.* 262 b 6, 265 a 4). Στὸ πνεῦμα αὐτὸ λέγει ὅτι ἡ ἄριστη πολιτεία βρίσκεται στὸ μέσον τῶν πολιτευμάτων μεσεύει δηλαδὴ (*Νόμοι*, ΣΤ, 756 e 9-10). Πρέπει νὰ ἐπισημανθεῖ ἀκόμα ἡ σχέση τοῦ 5 τοῦ πενταγώνου καὶ τοῦ κόσμου διότι ὁ ἀριθμὸς 5 εἶναι τὸ κέντρο, δηλαδὴ τὸ ἥμισυ τοῦ 10, τὸ ὁποῖο συμβολίζει τὸν κόσμον, τὸν οὐρανὸ, τὸ πᾶν (Ἰάμβλιχος 1992: 30 - 32, 83).

Βιβλιογραφία

- Εὐκλείδης, (1953-1975). *Στοιχεῖα*, 4 τόμοι, ἐκδ. Ε. Σταμάτης, Ο.Ε.Σ.Β., Ἀθήνα.
Θεοδορακόπουλος, Ἰ., (1971). *Πλάτωνος Φαῖδρος, Εἰσαγωγή, ἀρχαῖο κείμενο μὲ σχόλια*, Ἀθήνα.
Κάλφας, Β., (1997). *Πλάτων, Τίμαιος, Εἰσαγωγή, Μετάφραση, Σχόλια*, Πόλις, Ἀθήνα.
Καραμπατζάκη, Ἐ., (2014). «Ἐπιδράσεις τοῦ πλατωνικοῦ *Τιμαίου* στὴ στωικὴ φιλοσοφία», *Φιλοσοφεῖν* 10, 167-180.
Κουμάκης, Γ., (2013). «Περὶ τοῦ νοητοῦ καὶ ὁρατοῦ κόσμου κατὰ Πλάτωνα», *Φιλοσοφία καὶ κοσμολογία I*, Αἰγυῖς, Πειραιεύς.
— (2014^α). «Ὁ φιλόσοφος-Κυβερνήτης στὴν *Ἐπινομίδα* τοῦ Πλάτωνα», *Ἑλληνικὴ Φιλοσοφικὴ Επιθεώρηση*, 31, 3-25.



- (2014^β). «Προλεγόμενα για μιὰ νέα ἐρμηνεία γένεσης τοῦ κόσμου κατὰ Πλάτωνα (Τίμ. 54a 5 -7)», *Φιλοσοφία καὶ κοσμολογία II*, Αἰγίς, Πειραιεύς, 60-91.
- Μούκανος, Δ., (1979). *Ὁ τρόπος τοῦ εἶναι τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων κατὰ τὸν Πλάτωνα καὶ τὸν Ἀριστοτέλη*, Ἀθήνα.
- Παπασπύρου, Π., (2014). «Ὁ Πλατωνικὸς διάλογος *Τίμαιος* καὶ ἡ γέννηση τοῦ κοσμογραφικοῦ μυστηρίου τοῦ J. Kepler», *Φιλοσοφία καὶ κοσμολογία*, Αἰγίς, Πειραιεύς, 100-108.
- Σπανδάγος, Ε., (2001). *Ἡ ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή τοῦ Νικομάχου τοῦ Γερασίου*, Αἶθρα, Ἀθήνα.
- (2002). *Στοιχείων βιβλίον ἰδ' τοῦ Ὑψικλέους καὶ στοιχείων ἰε' Ἀνωνύμου*, Αἶθρα, Ἀθήνα.
- (2004α). *Ἡ χρυσοῦς τομὴ στὴν ἀρχαία Ἑλλάδα*, Αἶθρα, Ἀθήνα.
- (2004β). *Ἡ μαθηματικὴ συναγωγή τοῦ Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως*, Αἶθρα, Ἀθήνα.
- Φύλη, Χρ., (2002). «Ἡ γεωμετρικὴ θεώρηση τῆς ὕλης στὸν *Τίμαιο*», *Φιλοσοφία, Ἐπετηρὶς τοῦ Κέντρου Ἐρεύνης τῆς Ἑλληνικῆς Φιλοσοφίας*, 71-80.
- Albinos, (1945). *Epitomé*, ed. P. Louis, Les Belles Lettres, Paris.
- Alcinoos, (1990). *Enseignement des doctrines de Platon*, ed. Whittaker & P. Louis, Les Belles Lettres.
- Archer- Hind, R.D. (1888, 1988). *The Timaeus of Plato*, Ayer Company, Salem.
- Balashov, Y. (1994). “Should Platos ’ Line Be Divided in the Mean and Extreme Ratio?”, *Ancient Philosophy*, 14, 283-295.
- Cantor, G., (1892). *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, vol. II, B.-G. Teubner, Leipzig.
- Cherniss, H., (1976). *Plutarch’s moralia in seventeen volumes, XIII*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Cornford, F., (1956). “Mathematics and Dialectic in the *Republic* VI-VII”, in: R. Allen, *Studies in Plato’s Metaphysics*, London, Routledge & Kegan, 61-95.
- Diels, H., (1895). *Simplicii, In Aristotelis physicorum commentaria. Commentaria in Aristotelem Graeca X*, Academiae litterarum regiae borussicae, Berolini.
- Diels, H., Kranz, W., (2005, 2007). *Οἱ προσωκρατικοί. Οἱ μαρτυρίες καὶ τὰ ἀποσπάσματα*. Απόδοση στὰ νέα ἑλληνικά Β. Κύρκος, τόμοι Α καὶ Β, ἐκδόσεις Παπαδήμα, Ἀθήνα.
- Euclidis, (1973). *Elementa*, ed. I. L. Heiberg & E. Stamatis, Teubner, Leipzig.
- Festugière, A. J., (1970). *Proclus, Commentaire sur la République*. Tome II, Vrin, Paris.
- Gaiser, K., (1962). *Platons ungeschriebene Lehre*, Klett Verlag.
- Galilei, G., (1623). *Opera Omnia* vol. IV.
- Heath, Th., (1921)., *A History of Greek Mathematics*, vol. I, At the Clarendon Press, Oxford.
- (1931). *Manual of Greek Mathematics*, At the Clarendon Press, Oxford.
- (1956). *The Thirteen Books of Euclid’s Elements*, vol. II, Dover Publications, New York.
- Heisenberg, W., (2008). *Der Teil und das Ganze. Gespräche im Umkreis der Atomphysik*, Piper.
- Herz-Fischler, R., (1988). *A Mathematical History of the Golden Number*. Dover Publications, N.York.
- Hultsch, Fr., (1878). *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt*, vol. II, Weidmann, Berolini.
- Iamblichus, (1922). *Theologoumena arithmeticae*, ed. V. de Falco, Teubner, Lipsiae.
- Kepler, J., (1982). *Mysterium Cosmographicum*, trans. by A. M. Duncan, Abaris Books, New York.
- Koumakis, G., (2000). “Plato on Dialectic and Democracy”, *Δωδώνη*, τόμ. ΚΘ’, Μέρος τρίτο, 23-59.
- (2004). “Plato’s so-called “unwritten doctrines””, in: *Conceptions of Philosophy Ancient and Modern*, ed. by K. Boudouris, Athens, 192-215.
- (2010-11). “In Search of the Dialectic on the Divided Line (Plato, *Republic* 509d)”, *Πλάτων*, 57.
- Lassere, Fr., (1964), *The Birth of Mathematics in the Age of Plato*, London.
- Livio, M., (2005). *Ὁ χρυσοῦς λόγος, Ἡ ἱστορία τοῦ Φ, τοῦ ἐκπληκτικότερου ἀριθμοῦ*, μετάφρ. Μ. Σταυροπούλου, ἐκδόσεις Ἐνάλιος, Ἀθήνα.
- Lloyd, D., (2006). “Symmetry and Asymmetry in the Construction of “Elements” in the *Timaeus*”, *The Classical Quarterly*, 56, 459-474.
- Martin, Th., (1841, 1976). *Études sur le Timée de Platon*, Arno Press.
- Nicomachus Geraseni Pythagorei, (1866). *Introductionis arithmeticae, libri II*. ed. R. Hoche, Teubner.
- Philoponus, I., (1897). *In Aristotelis de anima libros commentaria. Commentaria in Aristotelum Graeca*, vol. XV, ed. M. Hayduck, Reimer, Berolini.
- Porphyre, (1982). *Vie de Pythagore, Lettre à Marcella*, ed. É des Places, Les Belles Lettres, Paris.
- Procli diadochi, (1901). *In Platonis Rem Publicam commentaria*, ed. G. Kroll, Teubner, Leipzig.
- (1904). *In Platonis Timaeus Commentaria*, ed. E. Diehl II, Teubner, Lipsiae.
- (1873, 1965). *In primum Euclidis elementorum commentaria*, Teubner, Lipsiae.



Τόμος Πρακτικών Φιλοσοφικού Forum «Ανάδρασις»
ISBN: 978-618-82935-0-2



ΔΙΕΘΝΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΤΑΙΡΙΑ
ΑΡΧΑΙΑΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ

- Stallbaum, G., (1863). *Platonis Timaeus et Critias. Platonis opera omnia*, vol. VIII, Gothae.
Timaeus Locrus, (1972). *De natura mundi et animae*, ed. W. Marg, E.J. Brill, Leiden.
Westerink, L.G., Trouillard, J., (1990). *Prolégomènes à la philosophie de Platon*, Les Belles Lettres.