



Τέλειον Μείζον Σύστημα κατὰ χρῶμα παρὰ Πλάτωνι

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

Καθηγητής Τμήματος Μουσικών Σπουδών
Φιλοσοφικής Σχολής Πανεπιστημίου Αθηνών,
Κοσμητῶρ της Διεθνούς Επιστημονικής Εταιρείας
της Αρχαίας Ελληνικής Φιλοσοφίας
hspyridis@music.uoa.gr
<http://users.uoa.gr/~hspyridis>

Περίληψις

Είθισται οι συγγράψαντες περί την αρμονικὴν ἐπιστῆμην καὶ τοὺς ἀρμονικοὺς λόγους βιβλία νὰ ονομάζωνται Ἀρμονικοὶ Συγγραφεῖς.

Ἐξ ὅλων τῶν υπαρχάντων ἀρχαιοελληνῶν ἀρμονικῶν συγγραφέων Μέγιστος τυγχάνει ὁ ἀλληγορικὸς Πλάτων, διότι:

- Μας δίδει λεπτομερεστάτας πληροφορίας δια τὴν δομὴν τοῦ διατονικοῦ γένους εἰς τὸ ἔργον τοῦ *Τίμαιος* (35a1-36b6).
- Μας παρέχει πληροφορίας γιὰ τὴν δομὴν τοῦ ἐναρμονίου γένους εἰς τὴν *Πολιτείαν* δια τοῦ πολλαπλασιαστικοῦ ἀριθμητικοῦ 729 (587 b11- 588 a2).
- Ἀποτελεῖ τὴν μοναδικὴν πηγὴν πληροφοριῶν περὶ τοῦ χρωματικοῦ γένους εἰς τὴν *Πολιτείαν* τοῦ (546c1).

Abstract

It is customary for the authors of the harmonic science and the harmonic ratios books to be called *harmonic authors*. Among the existent ancient Greek harmonic authors the greatest is the allegoric Plato, because:

- He gives us detailed information about the structure of the diatonic genus in his *Timaeus* (35a1-36b6)
- He provides us with information about the structure of the enharmonic genus through the number 729 (*Republic*, 587b11-588a2)
- He constitutes the unique source of information about the chromatic genus (*Republic*, 546c1)

1. Περὶ ἀλληγορίας

Τὸ λογικὸν ἀνθρώπινον ὄν ἀπὸ τῆς ἀρχαιότητος μέχρι σήμερον συνεχίζει ἀδιαλείπτως προσπαθὸν νὰ ἀνακαλύψῃ καὶ νὰ διατυπώσῃ βάσει τῆς ἐπιστημονικῆς γνώσεως, τὴν ὁποίαν



εκάστοτε διαθέτει, την λειτουργίαν της φύσεως, εφαρμόζον την Πλατωνικήν φιλοσοφικήν και επιστημονικήν άποψιν «σώζειν τα φαινόμενα».

Εκ της μελέτης του Πυθαγορισμού και του Πλατωνισμού αποκαλύπτεται ένας σφόδρα εντυπωσιακός μυστικισμός, όστις διέκρινε την μετάδοσιν της επιστημονικής γνώσεως μεταξύ των μεμνημένων οπαδών των και τούτο, διότι ανέκαθεν αι κοσμοθεωρίαι των κατ' έθνη ιερατείων εβασίζοντο εις τον συμβολισμόν.

Οι Αιγύπτιοι ιερείς, οι διδάσκαλοι του χρυσομήρου Πυθαγόρου, απεκάλυπτον τας αρχάς της επιστήμης μόνον κατόπιν ενδελεχούς ελέγχου, φοβερών δοκιμασιών και όρκων εις άτομα, τα οποία εκρίνοντο άξια να τας κατέχουν εφαρμόζοντες το σαφέστατον δόγμα «ού τὰ πάντα τοῖς πᾶσι ρητὰ».

Μολονότι η απόκρυφος γνώσις δεν επετρέπετο να κοινολογηθεί εις τους κοινούς θνητούς, εν τούτοις, ενίοτε εκοινολογοίτο τεχνιέντως. Οι ισμήνιοι¹ «παλαιοί»² Έλληνες φιλόσοφοι, τραγικοί και ποιητές εδίδασκον κρυφίως «μύθῳ φιλοσοφοῦντες» εις τους κοινούς θνητούς αποκρύφους τινάς διδασκαλίας, κεκαλυμμένας δι' αριστοτεχνικού φιλοσοφικού τρόπου.

Το επιφανειακόν νόημα των αλληγορικών κειμένων, το εμπειριεχόμενον εις τας γραμμάς των κειμένων, καθίσταται κατανοητόν τῇ βοηθείᾳ της Γραμματικής και του Συντακτικού (υποκειμενον-ρήμα-αντικείμενον). Η αλληγορία, ήτοι το κωδικοποιημένον μήνυμα, το απευθυνόμενον εις τους μεμνημένους, εντοπίζεται «μεταξύ» ή «όπισθεν» των γραμμών των κειμένων.

Διά την εξόρυξιν του νοήματος της εκάστοτε αλληγορίας απαιτείται αφενός η γνώσις των Πυθαγορείων Μαθηματικών³, αφετέρου ένα διεισδυτικόν βλέμμα εκπηγάζον εξ αυτής της γνώσεως.

Δια τοιαύτης τινός ματιάς μελετουμένη και διερευνουμένη η υπάρχουσα πληθύς των διεσωσμένων έργων της αρχαιοελληνικής γραμματείας -τραγωδίες, κωμωδίες, αινίγματα, χρησμοί-, πιθανόν να οδηγηθώμεν εις τον εντοπισμόν και εν συνεχείᾳ εις την κατανόησιν τυχόν

¹ Ισμήνιος, ο κατέχων την ακριβή γνώσιν. Η ονομασία Ισμήνιος προέρχεται εκ του ρήματος ίσημι, το οποίον σημαίνει γνωρίζω.

² οἱ παλαιοὶ πολλοῖς αἰνίγμασιν ἐχρῶντο καὶ μάλιστα πρὸς τοὺς ἱερεῖς
Πλούταρχος, *Αἴτια Ρωμαϊκά*, Stephanus 281B, 1.

Οἱ γὰρ παλαιοὶ τὰ ποιήματα αὐτῶν πρῶτον ἐν προιοιμίοις καὶ αἰνίγμασιν γεγράφασιν ὕστερον δὲ καὶ καθόλου φανερῶ ἐχρῶντο τῷ λόγῳ.

Σχόλια εις τον Αισχύλον, Σχόλια εις τον Προμηθέα δεσμώτην (scolia vetera)
Vita-argumentum-scholion-epigram sch verse 610 line 3.

³ Των τεσσάρων «ελευθερίων» τεχνών (Αριθμητική, Γεωμετρία, Μουσική, Αστρονομία) κατά τον Βοήθιον (Anicius Manlius Severinus Boethius) 5^{ος}-6^{ος} μ.Χ. αι.



αρρήτων δογμάτων ενυπαρχόντων εις ταύτην επ' ελπίδι αποκτήσεως νέας γνώσεως, ώστε να δυνηθώμεν να μυηθώμεν εις ταύτην, καθιστάμενοι και ημείς Ισμήνιοι και Λεσχηγόριοι⁴.

Εις επίρρωσιν των ανωτέρω, πρέπει να τονισθεί ο πολυφωνικός αιγιματικός λόγος του Πλάτωνος, όστις εχρησιμοποιήθη υπό του φιλοσόφου ως εργαλείον μυστικής διδασκαλίας.

Ως γνωστόν, «*Ο,τι δεν γνωρίζει κανείς δεν το αναγνωρίζει*».

Όντως, κάτι το οποίον δεν γνωρίζετε παντελώς και αγνοείτε την ύπαρξίν του, και να ευρίσκεται έμπροσθέν σας εμφανέστατα, δεν θα αντιληφθείτε την παρουσίαν του. Αναλογισθείτε πόσον δυσκολότερα καθίστανται τα πράγματα, όταν αυτό το κάτι είναι σκοπίμως τεθαμμένον κάτωθεν ενός σωρού αχρήστων ή μη ομοειδών ή ετεροειδών πραγμάτων!

Ο Πλάτων εγνώριζεν κάλλιον παντός άλλου ότι διαφορετικοί τύποι αναγνωστών έχουν την τάσιν ή την ικανότητα εκ του ιδίου κειμένου να αντλούν διαφορετικήν γνώσιν.

Διέθετε μίαν λογοτεχνικήν τεχνικήν δια της οποίας καθιστούσε ταυτοχρόνως σαφή δια του ιδίου κειμένου διαφορετικά ουσιαστικά πράγματα εις τρόπον, ώστε έκαστος των διαφορετικών τύπων αναγνωστών να αντλεί εξ αυτού του κειμένου ένα και μόνον ένα σημαίνόμενον, επί τη βάσει των όσων γνωρίζει.

Εφήρμοσεν τεχνικάς εμμέσου γνωστοποίησεως, προκειμένου να «καλύψει» εις τους διαλόγους του πάντα όσα ιδιαίτερος σημαντικά δεν επεθύμει να προσφέρει «έτοιμα προς βρώσιν» εις πάντας.

Εφήρμοσεν την γνωστήν -τουλάχιστον εις το αριστοκρατικόν κοινόν της εποχής του- ιδέαν ότι ένα κείμενο δύναται να ομιλεί δια περισσοτέρων της μιας φωνής «=αιγιματικός λόγος» εκ του οποίου ο αναγνώστης συλλαμβάνει ένα λανθάνον δεύτερον νόημα (=υπόνοια)⁵.

⁴ Λεσχηγόριοι, οι εφαρμόζοντες και χαιρόμενοι την αλήθειαν, συζητούντες και φιλοσοφούντες μεταξύ των. Η ονομασία Λεσχηγόριος συντίθεται εκ του ουσιαστικού λέσχη, εκ του ρήματος λέγω, το οποίον σημαίνει αναπαύομαι, κοιμούμαι, συνάγω, τακτοποιώ, εξάγω το άθροισμα, λέγω, ομιλώ, συλλογίζομαι και εκ του ουσιαστικού όριον, το οποίον σημαίνει σύνορον, πέρας. Λεσχηγόριος σημαίνει ανάπαυσις και λύτρωσις εκ του μόχθου, εκ της συλλογής της πείρας και της Σοφίας.

⁵ Σχετικώς ο Ολυμπιόδωρος (*Σχόλια εις τον Πλατωνικόν Αλκιβιάδη*, 2, 156-162) αναφέρει:

μέλλων τελευτᾶν ένύπνιον είδεν ώς κύκνος γενόμενος από δένδρου εις δένδρον μετέρχεται και ταύτη πόνον πλείστον παρείχε τοίς ίξευταίς. ὁ Σιμμίας ὁ Σωκρατικός ἔκρινεν, ὅτι ἄληπτος ἔσται τοίς μετ' αὐτόν ἐξηγεῖσθαι βουλομένοις αὐτόν· ίξευταῖς γάρ εὐόικασι οἱ ἐξηγηταί τὰς έννοίας τῶν ἀρχαίων θηρᾶσθαι πειρώμενοι, ἄληπτος δέ ἔστιν ἐπειδή και φυσικῶς και ἠθικῶς και θεολογικῶς και ἀπλῶς πολλαχῶς ἔστιν ἀκούειν τῶν αὐτοῦ, καθάπερ και τῶν Ὀμήρου.

Ολυμπιόδωρος, *Σχόλια εις τον Πλατωνικόν Αλκιβιάδη*, 2, 156-162.

[Όταν ήτο να πεθάνει, ο Πλάτων ωνειρεύθη πως είχε γίνει κύκνος (πρόκειται περί του ιερού πτηνού του θεού Απόλλωνος) και επέτα από δένδρου εις δένδρον και οι κυνηγοί δεν κατόρθωναν να τον συλλάβουν. Αυτό το όνειρο ο Σιμμίας ο Σωκρατικός έκρινε ότι σημαίνει πως το Πλατωνικό έργο οι εξηγηταί δεν θα δυνηθούν να το κατανοήσουν, επειδή λαμβάνει πολλές ερμηνείες φυσικές, ηθικές και θεολογικές, όπως και το έργο του Ομήρου].



Ο Πλάτων, δεχθείς Πυθαγορείους επιδράσεις υπό του Αρχύτου, του Ταραντίνου, παρήγαγεν και κατέλιπεν μέγα, ποικίλον και διαχρονικόν συγγραφικόν έργον, εις το οποίον ενυπάρχει ο δυϊσμός των Πυθαγορείων συστοιχιών, τον οποίον ο Πυθαγορισμός, μήτρα πολλών φιλοσοφιών, είχε πρωτοεισαγάγει εις τον ελληνικόν κόσμον.

Ο Πλάτων εις το συγγραφικόν του έργον ευρύτατα αλληγορεί επιλέξας την μουσικήν ως δύναμιν ικανήν να προβάλλει μιαν φιλοσοφικήν σύνθεσιν διατυπωμένην δια σημείων, δια συμβόλων, δι' αστερισμών και δια Μαθηματικών προτάσεων άνευ του φόβου να υποστεί διαστρέβλωσιν.

Σήμερον οι φιλόλογοι αποφεύγουν την εμβάθυνσιν εν ταις Πλατωνικαίς αλληγορίαις «απλουστεύοντες το κείμενον» και οι μαθηματικοί αντιμετωπίζουν τας διατυπουμένας μαθηματικές προτάσεις «ποιητική άδεία» με αποτέλεσμα εν πολλοίς ο Πλάτων να εξακολουθεί να είναι οικτρώς αδικημένος ως μη εισέτι κατανοούμενος.

2. Πυθαγόρειοι «συστοιχία»

Ο Πυθαγόρειος δυϊσμός υλοποιείται δια δέκα «συστοιχιών», ήτοι δέκα ζευγών εναντιοτήτων των λεγομένων αντίξων καθ' Ηράκλειτον, εναντίων κατά Παρμενίδην και κατ' Εμπεδοκλέα.

Επί των συστοιχιών αυτών στηρίζεται ολόκληρος η μεταφυσική αλήθεια και επ' αυτών εφίλοσόφησαν κατά τον ορθότερον τρόπον οι Νεοπλατωνικοί· ιδιαίτατα δε ο Πρόκλος.

ἕτεροι δὲ τῶν αὐτῶν τούτων τὰς ἀρχὰς δέκα λέγουσιν εἶναι τὰς κατὰ συστοιχίαν λεγομένας, πέρας [καὶ] ἄπειρον, περιττὸν [καὶ] ἄρτιον, ἐν [καὶ] πλῆθος, δεξιὸν [καὶ] ἀριστερόν, ἄρρεν [καὶ] θῆλυ, ἡρεμοῦν [καὶ] κινούμενον, εὐθὺ [καὶ] καμπύλον, φῶς [καὶ] σκότος, ἀγαθὸν [καὶ] κακόν, τετράγωνον [καὶ] ἑτερόμηκες·

Αριστοτέλης, *Μετά τα Φυσικά*, 986 a, 22-26

3. Πυθαγόρειοι⁶ Αναλογικότητες ή Αναλογίαι ή Μεσότητες

Κατά τον ρουν της Ιστορίας αι θρησκείαι ενεκλώβισαν τον άνθρωπον μεταξύ δύο αντιξώων: το αγαθόν και το κακόν, ήτοι τον Θεόν και τον Διάβολον και το απ' ανέκαθεν τιθέμενον μέγα φιλοσοφικόν ή/και θεολογικόν ερώτημα «οποία η στάσις του ανθρώπου μεταξύ των αντιξώων;» χρήζει απαντήσεως.

Οι Πυθαγόρειοι απήντησαν εκφραζόμενοι μαθηματικώς δι' ακεραίων και μόνον αριθμών εις το εν λόγω ερώτημα δια ΔΕΚΑ θέσεων –στάσεις ζωής- εκ των απείρων θεωρητικώς υπαρχουσών Γεωμετρικών θέσεων μεταξύ των αντιξώων, ήτοι ΔΕΚΑ ανά λόγον μεσότητας, η μελέτη των οποίων αποτελεί την θεωρίαν των μεσοτήτων ή των αναλογικοτήτων ή των αναλογιών.

4. Σύστημα

⁶ Οι δέκα αναλογίες μνημονεύονται υπό του Νικομάχου εις την πραγματείαν του *Αριθμητική Εισαγωγή* και υπό του Πάππου εις την πραγματείαν του *Συναγωγή*.

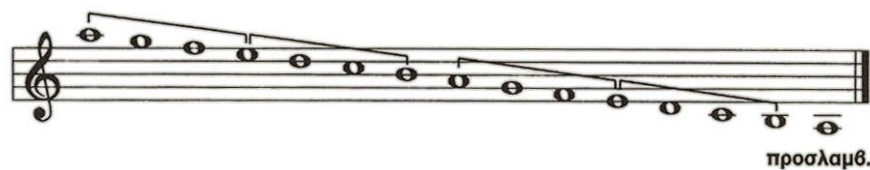


Κατά τον ορισμόν, τον οποίον ανευρίσκομεν εις τον Ανώνυμον του Bellermann (*Τέχνη Μουσική*, 51, 1-3) «Σύστημα δέ ἐστὶ σύνταξις πλειόνων φθόγγων ἐν τῷ τῆς φωνῆς τόπῳ θέσιν τινὰ ποιὰν ἔχουσα ἢ τὸ ἐκ πλειόνων ἢ ἐνὸς διαστήματος συνεστῶς», το σύστημα προκύπτει εκ της συλλειτουργίας τουλάχιστον τριῶν φθόγγων ἢ εκ της συνενώσεως τουλάχιστον δύο μουσικῶν διαστημάτων.

4.1. Τέλεια Μείζονα Συστήματα

4.1.1. Το Τέλειον Μείζον Σύστημα

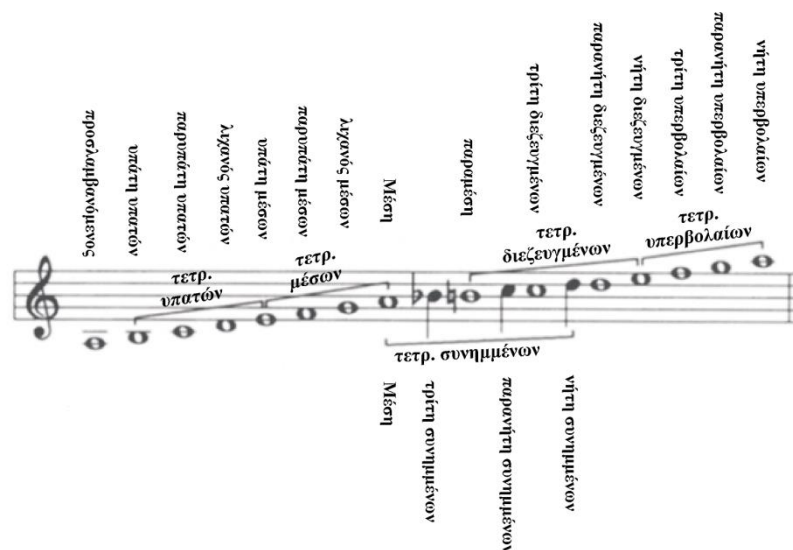
Εδομείτο υπό δύο ζευγῶν συνημμένων τετραχόρδων ἐν διαζεύξει και του προσλαμβανομένου φθόγγου ὡς χαμηλοτέρου, δι' ὃ και ονομάζεται σύστημα Διεζευγμένων.



Σχῆμα 1: Το Τέλειον Μείζον Σύστημα εδομείτο υπό δύο ζευγῶν συνημμένων τετραχόρδων ἐν διαζεύξει και του προσλαμβανομένου φθόγγου ὡς χαμηλοτέρου.

4.1.2. Το Τέλειον Μείζον Αμετάβολον Σύστημα

Επί πλέον των τεσσάρων τετραχόρδων του Τελείου Μείζονος Συστήματος τούτο εμπεριέχει και ἓνα πέμπτον τετραχόρδον Συνημμένον τῇ Μέσῃ.





Σχήμα 2: Το Σύστημα Τέλειον Μείζον Αμετάβολον

Ο Πλάτων διδάσκει μόνον το Τέλειον Μείζον Σύστημα εις το οποίον ενυπάρχουν τέσσερα μη εμπελεγμένα ή μη μειγνυόμενα τετράχορδα –υπονοών <τὰ Ἡσιόδου γένη>- Υπατών, Μέσων, Διεζευγμένων, Υπερβολαίων.

<τὰ Ἡσιόδου γένη> χρυσοῦν τε καὶ ἀργυροῦν καὶ χαλκοῦν καὶ σιδηροῦν· ὁμοῦ δὲ μιγέντος σιδηροῦ ἀργυρῶ καὶ χαλκοῦ χρυσοῦ ἀνομοιότης ἐγγενήσεται καὶ ἀνωμαλία ἀνάρμοστος.

Πλάτωνος, *Πολιτεία*, 547a, 1-5

Ὄντως, εις το Τέλειον Μείζον Αμετάβολον σύστημα οι φθόγγοι δύο εκ των πέντε υπαρχόντων εν αυτῷ τετραχόρδων αναμειγνύονται. Πρόκειται περί του τετραχόρδου συνημμένων, το οποίον δομεῖται εκ των φθόγγων Μέση, Τρίτη συνημμένων, Παρανήτη συνημμένων και Νήτη συνημμένων και περί του τετραχόρδου Διεζευγμένων, το οποίον δομεῖται εκ των φθόγγων Παραμέση, Τρίτη διεζευγμένων, Παρανήτη διεζευγμένων και Νήτη Διεζευγμένων. Δεδομένου ότι οι φθόγγοι Παρανήτη συνημμένων και Νήτη συνημμένων συμπίπτουν, αντιστοίχως, μετά των φθόγγων Τρίτη διεζευγμένων και Παρανήτη διεζευγμένων, τα εν λόγω τετράχορδα εμπλέκονται-αναμειγνύονται. Συνεπώς, ο Πλάτων ουδόλως ομιλεί περί των δύο αρμονιών ή οκτάβων του Τελείου Μείζονος Αμεταβόλου συστήματος.

5. Αρμονικός Συγγραφεύς

Περί αυτού του ειδικού αρχαιοέλληνας επιστήμονος παραθέτω δύο ορισμούς διδομένους υπό του Πορφυρίου και του Ιαμβλίχου, αντιστοίχως.

ἀρμονικὸς δ' ἐστὶ ὁ περὶ τοῦ ἡρμοσμένου ποιούμενος τοὺς λόγους

Πορφύριος, *Υπόμνημα εις τα Αρμονικά του Πτολεμαίου*, 23, 6

Ἀρμονικὸς ὁ περὶ τὴν τοῦ Πυθαγόρου ἀρμονικὴν ἐπιστήμην καὶ τοὺς ἀρμονικοὺς λόγους ἀσχολούμενος.

Ιάμβλιχος, *Περί του Πυθαγορικού Βίου*, 25, 115, 4

Εἴθισται οι συγγράψαντες περί την ἀρμονικὴν ἐπιστήμην καὶ τοὺς ἀρμονικοὺς λόγους βιβλία να ονομάζονται Ἀρμονικοὶ Συγγραφεῖς. Δεν κατέστη αντιληπτόν ἀχρι στιγμῆς ότι εκ των υπαρχάντων αρμονικών συγγραφέων Μέγιστος τυγχάνει ο Πλάτων και ιδού διατί:

Εἶναι ο μόνος, ο οποίος αλληγορικῶ τῷ τρόπῳ μας δίδει λεπτομερεστάτας πληροφορίας για την δόμησιν των διατονικών κλιμάκων εις την Γένεσιν Ψυχῆς Κόσμου εις το ἔργον του *Τίμαιος*

τῆς ἀμερίστου καὶ ἀει κατὰ ταῦτα ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αὖ περὶ τὰ σώματα γινομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀφοῦν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταυτοῦ φύσεως [αὖ πέρι]



καὶ τῆς τοῦ ἑτέρου, καὶ κατὰ ταῦτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἀμεροῦς αὐτῶν καὶ τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦ· καὶ τρία λαβὼν αὐτὰ ὄντα συνεκεράσατο εἰς μίαν πάντα ιδέαν, τὴν θατέρου φύσιν δύσμεικτον οὖσαν εἰς ταῦτὸν συναρμόττων βίᾳ.

Πλάτων, *Τίμαιος*, 35a1

Έως τώρα γνωρίζατε ότι για το Πυθαγόρειο εναρμόνιο γένος μοναδικά πηγαία πληροφορίας ήσαν οι υπ' αριθμόν 17 και 18 προτάσεις της Μουσικομαθηματικής πραγματείας *Ευκλείδου Κατατομής Κανόνος* (3^{ος} π.Χ. αι.).

Σήμερα σας αναφέρω, διότι δεν το έχουμε αντιληφθεί ότι ο Πλάτων εις την *Πολιτείαν* του κυρίως δι' ενός πολλαπλασιαστικού αριθμητικού, του έννεακαιεικοσικαιεπτακοσιοπλασιάκις (729), μας παρέχει πληροφορίας για την δομήν του εναρμονίου γένους⁷ διακόσια έτη προ του Ευκλείδου.

Οὐκοῦν ἐάν τις μεταστρέψας ἀληθείᾳ ἡδονῆς τὸν βασιλέα τοῦ τυράννου ἀφεστηκότα λέγῃ ὅσον ἀφέστηκεν, έννεακαιεικοσικαιεπτακοσιοπλασιάκις ἥδιον αὐτὸν ζῶντα εὐρήσει τελειωθείσῃ τῇ πολλαπλασιῶσει, τὸν δὲ τύραννον ἀνιάρότερον τῇ αὐτῇ ταύτῃ ἀποστάσει.

Πλάτων, *Πολιτεία*, 587d12

Ουδείς των υπαρξάντων αρμονικών συγγραφέων έγραψεν περί του χρωματικού γένους παρά μόνον ο Πλάτων. Η σχετική περικοπή, ήτις είναι μοναδική, δεν αντιμετωπίζεται ορθώς ακόμη και υπό του μεγίστου Πρόκλου.

ὦν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεῖς δύο ἁρμονίας παρέχεται τρις ἀυξηθεῖς

Πλάτων, *Πολιτεία*, 546c1

6. Τέλειον Μείζον Σύστημα κατά χρώμα παρά Πλάτωνι

Θα σας ομιλήσω περί του υπό του Πλάτωνος λεγομένου γεωμετρικού αριθμού.

⁷ Ο αριθμός 729 αναλύμενος εις Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα

$$729 = 9^3 = \frac{9^3}{8^3} \cdot 8^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot (2^3)^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^9$$

μας παρέχει ένα πυθαγόρειο τρίτονον $\left(\frac{9}{8}\right)^3$ συν εννέα διαπασών $\left(\frac{2}{1}\right)^9$. Το

πυθαγόρειο τρίτονον ήτο το πλέον διάφωνο μουσικόν διάστημα του μουσικού συστήματος, το οποίον εγνώριζεν ο Πλάτων, το άκουσμα του οποίου προεκάλει αίσθημα άσης. Εξακολουθεί και σήμερα το πυθαγόρειο τρίτονον να φέρει τον αυτόν οικτρώς διάφωνο χαρακτήρα (*diabolo in musica*) εις το δυτικόν τονικόν σύστημα 2.500 χρόνια μετά. Αυτό το οποίον ο Πλάτων εξετίμησεν δια του αριθμού 729 ήτο η σχέση μεταξύ του βασιλέως και του τυράννου και την σχέση ταύτην την θεωρεί ως την μεγίστην δυνατήν έντασιν-άσπην εντός ενός πολιτισμένου συστήματος.



Η ασάφεια της αναφοράς του Πλάτωνος περί του γεωμετρικού αριθμού είναι τοσούτον μεγάλη, ώστε είχαν καταστεί παροιμιώδης για τους αρχαίους. Τούτου του γεγονότος ένεκα υπήρξεν προβληματισμός μήπως παλαιόθεν εγένετο λαθροχειρία επί του κειμένου.

Το δυστύχημα για την Φιλοσοφίαν είναι ότι εις ουδέν εκ των σωζομένων φιλοσοφικών συγγραμμάτων δεν υπάρχει ίχνος διασαφήνσεως περί του συγκεκριμένου προβλήματος.

Όντως, απαιτείται υψίστου βαθμού μύησις, ήτοι βαθύταται γνώσεις Πυθαγορείου Αριθμητικής, Γεωμετρίας και Μουσικής, αι οποίαι εις ολιγόλεπτον ομιλίαν δεν μεταφέρονται. Όμως, εντός του τακτού χρόνου θα παραθέσω την λύσιν του προβλήματος για πρώτην φοράν, το οποίον εν ολίγοις αφορά εις την κατατομήν του κανόνος κατά χρώμα παρά Πλάτωνι ή, όπως λέγομεν εις την Βυζαντινήν Μουσικήν, κατά το χρωματικόν γένος.

Ο Πλούταρχος εις το έργον του *Περί Μουσικής* εκθειάζει τον Πλάτωνα ως εμπειρότατον περί των θεμάτων της αρμονίας (=διαπασών) «ὁ Πλάτων ... ἔμπειρος ἄρμονίας ἦν».

Εκκινούμεν εκ της σεμνής, ουρανίου φύσεως, θείας, καλής και δαιμονίου αρμονίας, το μουσικό διάστημα το οποίον εκθειάζει ο Αριστοτέλης «ὄτι σεμνή ἡ ἄρμονία καὶ θεῖόν τι καὶ μέγα, Αριστοτέλης ὁ Πλάτωνος ταυτὶ λέγει ἡ δὲ ἄρμονία ἐστὶν οὐρανία τὴν φύσιν ἔχουσα θεῖαν καὶ καλὴν καὶ δαιμονίαν».

Το διάστημα της αρμονίας (2:1), παρεμβάλλοντες εν πρώτοις εν αὐτῷ δύο μεσότητες, το καθιστώμεν τετραμερές. Αι δύο μεσότητες αὐται είναι η τρίτη και η τετάρτη εκ των δέκα Πυθαγορείων μεσοτήτων, ήτοι η αρμονική ή υπενάντιος και η ενάντιος της υπεναντίου.

Συγκεκριμένως, δοθέντων δύο ακεραίων αριθμών α και γ ($\alpha > \gamma$), δομούντων την Πλατωνικήν συστοιχίαν ταῦτὸν-θάτερον, ήτοι 1:2, κατά την Πυθαγόρειον θεωρίαν περί Μεσοτήτων η αρμονική ή υπενάντιος μεσότης

$$\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2 + 1} = \frac{4}{3}$$

προκύπτει εκ του ορισμού της Αρμονικής ή υπεναντίου αναλογίας

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$$

Τοιαύτην αναλογίαν $2, \frac{4}{3}, 1$ δομούν οι ακέραιοι αριθμοί 6, 4, 3.

Η ενάντιος της υπεναντίου μεσότης $\beta = \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha + \gamma} = \frac{2^2 + 1^2}{2 + 1} = \frac{5}{3}$ προκύπτει εκ του ορισμού της

εναντίου της υπεναντίου αναλογίας

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Τοιαύτην αναλογίαν $2, \frac{5}{3}, 1$ δομούν οι ακέραιοι αριθμοί 6, 5, 3.



Εκ των ορισμών των ανωτέρω αναλογιών τα μέρη των και τα μεγέθη των και αι υπεροχαί των είναι «κατ' αριθμόν και ίσομετρίαν». Τούτο τονίζεται, διότι εις το πρώτον κλάσμα της αναλογίας συμμετέχουν όχι απλοί αριθμοί, αλλά διαφοραί (=μεγέθη) αριθμών.

Επί τῆ βάσει της Πυθαγορείου ρήσεως «ἀρμονία ἐστὶ κρᾶσις καὶ σύνθεσις ἐναντίων» ἐνθα υπονοεῖται ὅτι ἡ ἀρμονία, ἤτοι ἡ διαπασών ἢ ἡ οκτάβα, δομεῖται ὑπὸ τῆς συνθέσεως δύο ἐναντιοτήτων τῆς ἀρμονικῆς ἢ ὑπεναντίου καὶ τῆς ἐναντίου τῆς ὑπεναντίου αναλογιών ἢ αναλογικοτήτων. Τὴν κρᾶσιν καὶ τὴν σύνθεσιν τῶν δύο ἀναφερθεῖσων ἐναντιοτήτων τὴν γράφω ὡς 3, 4, 5, 6.

Ὅμως, οἱ προκύψαντες τέσσερις ἀριθμοὶ δομοῦν καὶ μίαν Ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta} = \frac{\gamma}{\gamma}$$

ἡ ἀριθμητικὴ μεσότης $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{6 + 3}{2} = \frac{9}{2}$ τῆς ὁποίας ἐντίθεται ὡς πέμπτον μέλος μεταξὺ τῶν

προαναφερθέντων τεσσάρων ἀριθμῶν 3, 4, $\frac{9}{2}$, 5, 6. Διὰ διπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν τῆς ἐν λόγῳ πεμπάδος, αὕτη ἐκφράζεται δι' ἀκεραίων καὶ μόνον ἀριθμῶν ὡς 6, 8, 9, 10, 12.

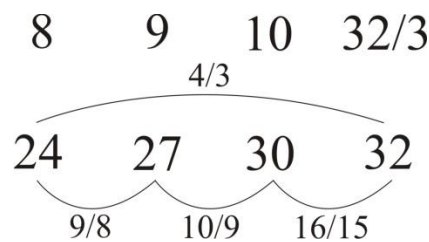
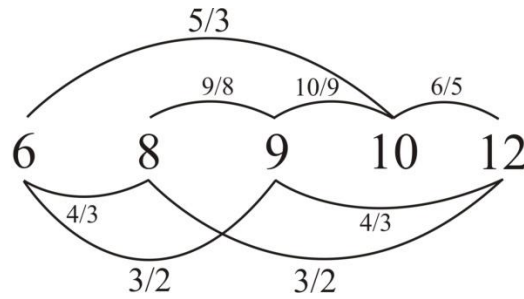
Τοιοῦτοτρόπως, τὸ διάστημα τῆς ἀρμονίας (2:1), παρεμβληθεῖσων τῶν τριῶν μεσοτήτων, κατέστη πενταμερές 6, 8, 9, 10, 12. Λεπτολογούντες ἐτι περισσότερον, διαπιστοῦμεν τὴν ὑπαρξιν καὶ πέμπτης ἀναλογίας, τῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ἣτις ἐκφράζεται ἐμπλέγδην καὶ ἐναλλάγδην ὑπὸ τῆς σχέσεως $\left(\frac{9}{6} = \frac{12}{8}\right)$.

Μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὀρων τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας 6, 9, 12 σχηματίζονται τὰ μουσικὰ διαστήματα τοῦ διατονικοῦ γένους διαπέντε ($9/6=3/2$) καὶ διατεσσάρων ($12/9=4/3$), ἐνῶ μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὀρων τῆς ἀρμονικῆς ἢ ὑπεναντίου ἀναλογίας 6, 8, 12 σχηματίζονται τὰ μουσικὰ διαστήματα διατεσσάρων ($8/6=4/3$) καὶ διαπέντε ($12/8=3/2$).

Μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὀρων τῆς ἐναντίου τῆς ὑπεναντίου ἀναλογίας 6, 10, 12 σχηματίζονται τὰ μουσικὰ διαστήματα τοῦ χρωματικοῦ γένους μείζων ἔκτη χρωματικὴ ($10/6=5/3$) καὶ τρίτη ἐλάσσων χρωματικὴ ($12/10=6/5$).

Μεταξὺ τῆς ἀρμονικῆς (8) καὶ ἀριθμητικῆς (9) μεσότητος σχηματίζεται τὸ διάστημα τοῦ ἐπογδόου τόνου ($9/8$) καὶ μεταξὺ ἀριθμητικῆς (9) καὶ τῆς ἐναντίου τῆς ὑπεναντίου μεσότητος (10) σχηματίζεται ὁ ἐλάσσων χρωματικὸς τόνος ($10/9$).

Ἀνθυφαιρουμένων τῶν διαστημάτων τοῦ διατονικοῦ καὶ τοῦ χρωματικοῦ γένους, γεννῶνται νέα λίαν ἐνδιαφέροντα χρωματικὰ μουσικὰ διαστήματα, ὡς εἶναι φερ' εἰπεῖν τὸ χρωματικὸν ἡμίτονον ($16/15$), διὰ τοῦ ὁποίου ὁμοῦ οἱ δύο προαναφερθέντες τόνοι δομοῦν τετράχορδον ($9/8 \cdot 10/9 \cdot 16/15 = 4/3$).



Δια δύο τετραχόρδων καθορίζονται τα μέρη της χρωματικής δομής του διαπασών δια ρητών αριθμών ως ακολούθως:

Το ένα τετράχορδον του διαπασών περιχαρακούται μεταξύ των αριθμών 6 και 8, ήτοι της Νήτης και της Παραμέσης.

Το έτερον τετράχορδον του διαπασών περιχαρακούται μεταξύ των αριθμών 12 και 9, ήτοι της Υπάτης και της Μέσης.

Τα προμνημονευθέντα δύο τετράχορδα είναι διεζευγμένα, οπότε μεταξύ των υπάρχει ο επόγδοος τόνος.

Τοιουτοτρόπως, εδομήθη, ως ο Αριστοτέλης μνημονεύει, το διαπασών διάστημα δια των αδρομερών του διαστηματικών στοιχείων, ήτοι δια των δύο τετραχόρδων του και του επογδίου διαζευκτικού τόνου.

Τώρα πρέπει να προχωρήσωμεν εις την μικροδομήν αυτού του μεμονωμένου διαπασών, ήτοι εις τον πρόποντα κερματισμόν των τετραχόρδων του, όστις οφείλει να είναι ο αυτός δι' αμφοτέρα τα τετράχορδα.

Καθοδηγός μας θα είναι η διπλή πεμπάς ($2 \cdot 5 = 10$), ήτοι ο αριθμός δέκα, η μεσότης της εναντίου της υπεναντίου αναλογίας. Το μόνον δεδομένον είναι ότι μεταξύ της αριθμητικής μεσότητας, ήτοι του αριθμού 9, και της εναντίου της υπεναντίου μεσότητας, ήτοι του αριθμού 10, δομείται το διάστημα του ελάσσονος χρωματικού τόνου ($10/9$).

Τίνι τρόπω, όμως, θα κερματίσωμεν το υπόλοιπον του τετραχόρδου, το ευρισκόμενον μεταξύ των αριθμών 10 και 12 άνευ οιασδήποτε αυθαιρεσίας;

Για τον ορθόν κερματισμόν του εν λόγω τετραχόρδου πρέπει:



Περίπτωσης 1^η: Τον ελάσσονα τόνον (10/9) να ακολουθεί μείζων τόνος (9/8) και κατόπιν το χρωματικόν ημίτονον (16/15).

Τον ίδιον κερματισμόν πρέπει να εμφανίζει και το έτερον τετράχορδον μεταξύ των αριθμών 6 και 8. Συνεπώς, η διαστηματική δομή του μεμονωμένου χρωματικού διαπασών εκφράζεται ως:

6	20/3	15/2	8	9	10	45/4	12
---	------	------	---	---	----	------	----

και μετά την ακεραιοποίησιν των αριθμών εκφράζεται ως:

72	80	90	96	108	120	135	144
----	----	----	----	-----	-----	-----	-----

Περίπτωσης 2^α: Τον ελάσσονα τόνον (10/9) να ακολουθεί το χρωματικόν ημίτονον (16/15) και κατόπιν ο μείζων τόνος (9/8).

Τον ίδιον κερματισμόν πρέπει να εμφανίζει και το έτερον τετράχορδον μεταξύ των αριθμών 6 και 8. Συνεπώς, η διαστηματική δομή του μεμονωμένου χρωματικού διαπασών εκφράζεται ως:

6	20/3	64/9	8	9	10	32/3	12
---	------	------	---	---	----	------	----

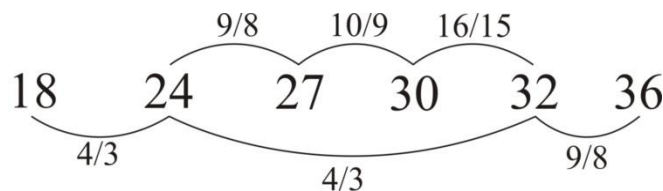
και μετά την ακεραιοποίησιν των αριθμών εκφράζεται ως:

54	60	64	72	81	90	96	108
----	----	----	----	----	----	----	-----

Για τους επαίοντας, θα εδυνάμεθα να δομήσωμεν το διαπασών όχι ως αυτόνομον μουσικήν οντότητα, αλλά ως ήμισυ ενός Μείζονος Τελείου Συστήματος, εμπεριέχοντος –κατά τα γνωστά– δύο αρμονίας, ήτοι δύο διαπασών. Εις την περίπτωσιν ταύτην τα τετράχορδα είναι συνημμένα και όχι διεξυγμένα και την δομήν ταύτην περιγράφει ο Πλάτων με τας ασυνήθεις ποιητικώς διατυπωμένας μαθηματικές εκφράσεις.

Το πρώτον των συνημμένων τετραχόρδων ευρίσκεται μεταξύ των αριθμών 6 και 8. Ακολουθεί το δεύτερον συνημμένον τετράχορδον δομούμενον εκ του επογδόου τόνου μεταξύ των αριθμών 8 και 9, εκ του ελάσσονος χρωματικού τόνου μεταξύ των αριθμών 9 και 10 και εξ ενός διαστήματος 16/15 μεταξύ του αριθμού 10 και ενός αριθμού $x=32/3$. Το καινοφανές μουσικόν διάστημα 16/15 ονομάζεται ημίτονον χρωματικόν.

Ο μη ακέραιος αριθμός $x=32/3$ επιβάλλει τον τριπλασιασμόν όλων των αριθμών των εμπλεκομένων εις το διαπασών, ώστε να εκφράζωνται δι' ακεραίων αριθμών.





Δια πρώτην φοράν εμφανίζεται η χρωματική δομή του τετραχόρδου των Διεzeugμένων εξ επογδίου τόνου (9/8), ελάσσονος χρωματικού τόνου (10/9) και εκ χρωματικού ημιτόνου (16/15) κατά την κατιούσαν διαδοχήν.

Ομοίαν δομήν οφείλει να έχει και το έτερον τετράχορδον, το περιχαρακωμένον μεταξύ των αριθμών 18 και 24.

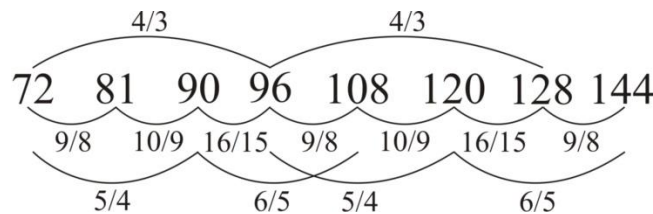
Εις τον συγκεκριμένον κατακερματισμόν του τετραχόρδου (18, 24) εμφανίζονται οι μη ακέραιοι αριθμοί 81/4 και 45/2,

18	81/4	45/2	24	27	30	32	36
----	------	------	----	----	----	----	----

οι οποίοι επιβάλλουν τον τετραπλασιασμόν όλων των εμπλεκομένων εις την δομήν του διαπασών αριθμών

72	81	90	96	108	120	128	144
----	----	----	----	-----	-----	-----	-----

με την κάτωθι διαστηματικήν μικροδομήν:



Εν άλλοις λόγοις, έχομεν μίαν διαστηματικήν δομήν, μίαν κλίμακα μικτού χαρακτήρος, εμπεριέχουσα μείζονας τρίτας και ελάσσονας χρωματικές τρίτας (5:4, 6:5), μείζονας διατονικούς (9:8) και ελάσσονας χρωματικούς (10:9) τόνους καθώς επίσης και χρωματικά ημίτονα (16:15).

Αλληγορών ο Πλάτων

- ✓ δια της εκφράσεως «οι πολίτες της ανωτάτης εισοδηματικής τάξεως» υπονοεί τους μουσικούς φθόγγους, οι οποίοι γεννώνται υπό του επιτρίτου πυθμένου (4/3). Μόνον οι πολίτες ούτοι δύνανται να δομούν τετράχορδα.
- ✓ η παρουσία του ανθρωπέου άρρενος αριθμού, του 5, συμβάλλει εις την εμφάνισιν των πολιτών της δευτέρας τάξεως, ήτοι των διαστημάτων της ελάσσονος χρωματικής τρίτης (6/5).
- ✓ οι πολίτες της τρίτης κάστας δομούν μείζονα (9/8) και ελάσσονα (10/9) τονιαία, αλλά και ημιτονιαία (16/15) μουσικά διαστήματα εντός των τετραχόρδων.

Ούτοι είναι οι κάτοικοι της ιδανικής Πλατωνικής Πολιτείας, οι ταξινομούμενοι εις τρεις διαφορετικές κλάσεις –κάστας- πολιτών μειουμένου πολιτικού κύρους –status- των αρχόντων, των επίκουρων και των δημιουργών.



Εκ της ανωτέρω αλληγορίας καταφαίνεται ότι οι φθόγγοι εκ διαφορετικών μουσικών τάξεων επιτελούν διαφορετικές μουσικές λειτουργίας, απαραίτητους εις την μουσικήν σύνθεσιν, ήτοι την Πολιτείαν, ως συνόλου. Πάντα ταύτα απορρέουν εκ της μουσικής τονικότητας, δια της οποίας υποδηλούται η χαρακτηριστική τάσις της μουσικής γλώσσης να οργανούται με συνοχήν περίξ διαφόρων ηχητικών πόλων έλξεως, των αποκαλουμένων *τονικά κέντρα*. Επί τη βάσει της τονικότητας καθορίζονται αυστηρώς αι συγκεκριμέναι σχέσεις και λειτουργία, αι διέπουνται την διασύνδεσιν του τονικού κέντρου μετά των υπολοίπων φθόγγων της κλίμακος και αι υφαίνουσαι την γενικότεραν μικροδομήν και μακροδομήν μιας τονικής συνθέσεως δια περιόδων αφορίας και ευφορίας, τας υπονοουμένας υπό του Πλάτωνος εις την *Πολιτείαν* του (546 a).

Με αυτήν την διαστηματικήν δομήν του διαπασών 9/8 10/9 16/15 9/8 10/9 16/15 9/8, ήτοι τετράχορδον, τετράχορδον, επόγδοος τόνος και μόνον δυνάμεθα να δομήσωμεν Τέλειον Μείζον Σύστημα, είτε λαμβάνοντες το έτερον διαπασών αριστερόθεν του υπάρχοντος δια διαιρέσεως των υπάρχουσών ενδείξεων δια 2

36	40.5	45	48	54	60	64	72	81	90	96	108	120	128	144
----	------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----

είτε λαμβάνοντες το έτερον διαπασών δεξιόθεν του υπάρχοντος δια πολλαπλασιασμού των υπάρχουσών ενδείξεων επί 2

72	81	90	96	108	120	128	144	162	180	192	216	240	256	288
----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Η πρώτη διαδικασία λόγω της εμφανίσεως ενός μη ακεραίου αριθμού

36	40.5	45	48	54	60	64	72
----	------	----	----	----	----	----	----

μας υποχρεώνει να διπλασιάσωμεν τους εμπλεκομένους εις το δις διαπασών σύστημα αριθμούς, οπότε καταλήγομεν εις τους ιδίους αριθμούς με την δευτέραν διαδικασίαν, ήτοι:

72	81	90	96	108	120	128	144	162	180	192	216	240	256	288
----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Αύτη τυγχάνει η κατατομή του κανόνος κατά το Τέλειον Μείζον Σύστημα του χρωματικού γένους, η οποία ως καθοδηγός, θα οδηγήσει τον μελετητήν εις αριθμούς συμβατούς προς όρους «δυναμένων και δυναστευομένων», ήτοι εις την ορθήν και μονοσήμαντον αριθμητικήν αποκωδικοποίησιν του Πλατωνικού αποσπάσματος (*Πολιτεία*, Stephanus 546, c 1-7).

«ὢν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεῖς δύο ἄρμονίας παρέχεται τρεῖς ἀξηθεῖς, τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις, ἑκατὸν τοσαυτάκις, τὴν δὲ ἰσομήκη μὲν τῆ, προμήκη δέ, ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἐκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν, ἑκατὸν δὲ κύβων τριάδος. σύμπαρ δὲ οὗτος ἀριθμὸς γεωμετρικός.»