



Η μαθηματική προτυποποίηση στις φυσικές επιστήμες

Ιωάννης Δ. Σφήκας
Πολιτικός Μηχανικός
sfikas@hotmail.com

Περίληψη

Οι φυσικοί νόμοι είναι συμβολικές σχέσεις μεταξύ φυσικών μεγεθών. Οι σχέσεις αυτές εκδηλώνονται στα διάφορα φυσικά φαινόμενα και εκφράζονται με μαθηματική γλώσσα, η οποία συμπυκνώνει την ανθρώπινη γνώση για τη φύση. Κατά την επιστημονική έρευνα είναι συχνά επιθυμητό να περιγραφεί η συμπεριφορά ενός φυσικού, κοινωνιολογικού ή ακόμα και οικονομικού συστήματος ή φαινομένου της πραγματικής ζωής με όρους των Μαθηματικών. Η μαθηματική περιγραφή ενός τέτοιου συστήματος ή φαινομένου ονομάζεται *μαθηματικό μοντέλο* ή *μαθηματικό πρότυπο* και αυτό οικοδομείται με κάποιες καθορισμένες γνωσιοθεωρητικές διαδικασίες. Στην παρούσα εργασία δίδονται τα γενικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών μοντέλων, ταξινομούνται και αναλύονται με βάση τα γενικά γνωρίσματά τους.

Abstract

Natural laws are symbolic relationships between physical quantities. These relationships expose in various physical phenomena and are expressed in mathematical language, which concentrates encapsulates human knowledge about nature. Therefore, in scientific research is often desirable to describe the behavior of a physical, sociological or even economic system or phenomenon of real life in terms of mathematics. The mathematical description of such a system or phenomenon called *mathematical model* and this is built on some defined gnosioteoretical processes. In this paper are given the general characteristics of mathematical models in various sciences, they classified according to these general traits and we analyze their general principles.

Εισαγωγή

Οι άνθρωποι διαθέτουν αρκετή πρακτική γνώση για το φυσικό περιβάλλον και την κοινωνία και ενδεχομένως θα ήταν αδύνατο να επιβιώσουν χωρίς αυτήν. Αυτός ο σκελετός της πρακτικής τεχνολογίας είναι ευπροσάρμοστος και ευέλικτος, αλλά ανθεκτικός και στέρεος, παρά το γεγονός πως δεν είναι συντονισμένος με τη μορφή μιας ακριβούς και ρητά διατυπωμένης θεωρίας. Κατ' αντιπαραβολή, η επιστημονική δραστηριότητα είναι ρητά καθοδηγούμενη από τη θεωρία, αλλά αυτό δεν αρνείται το γεγονός ότι η τελευταία υποβαστάζεται από το ίδιο είδος πρακτικών συνταγών (Powers, 2000). Σε γενικές γραμμές, ο λογικός θετικισμός μπορεί να λειτουργήσει ως επαγγελματική ιδεολογία, κατάλληλη να υπερασπιστεί την επικράτεια μιας τεχνικής κοινότητας που επιλύει αινίγματα, έχει εμπιστοσύνη στις ειδικές γνώσεις της και περιφρονεί τις ερασιτεχνικές απόπειρες ανάμειξης στις πρακτικές της.

Στη σύγχρονη εποχή, η επιστήμη χαίρει υψηλής εκτίμησης, παρά την απόγνωση που προκαλούν καταστάσεις, οι οποίες θεωρούνται πως απορρέουν από την επιστήμη καθ' εαυτήν, όπως η βόμβα υδρογόνου, η μόλυνση του περιβάλλοντος ή η πυρηνική ενέργεια



(Chalmers, 1998). Η υπόληψη αυτή της επιστήμης δεν εξαντλείται στην καθημερινή ζωή, αλλά αποκαλύπτεται και στους κλάδους της εκπαίδευσης, της βιομηχανίας κ.ά. Οι επιστήμονες διατυπώνουν υποθέσεις για να διαμορφώσουν καθολικές φυσικές θεωρίες, συμβολικές αναπαραστάσεις της πραγματικότητας, δηλαδή αυτοί επιστρατεύουν τις συμβολικές, παραστατικές και δημιουργικές τους ικανότητες για να επινοήσουν και να αναπτύξουν πραγματικές ή συμβολικές μορφές και δομές, οι οποίες μιμούνται ή αναπαριστούν ιδεατά τις πτυχές της πραγματικότητας. Οι επιστημονικές θεωρίες συνιστούν ανθρώπινα διανοητικά οικοδομήματα και υπόκεινται σε μια ατέρμονη διαδικασία μεταβολής και εξέλιξης. Η επιλογή των κατάλληλων υποθέσεων αποτελεί κρίσιμο στοιχείο για την κατανόηση και την ερμηνεία των φυσικών ή κοινωνικών φαινομένων.

Οι φυσικοί νόμοι είναι συμβολικές σχέσεις μεταξύ φυσικών μεγεθών, οι οποίες αναφέρονται στην κίνηση και τη δομή της ύλης, στην ενέργεια και στις αλληλεπιδράσεις ύλης και ενέργειας, δηλαδή αυτοί περιγράφουν τις μεταβολές του περιβάλλοντος φυσικού κόσμου. Οι σχέσεις αυτές εκδηλώνονται στα διάφορα φυσικά φαινόμενα και εκφράζονται με μαθηματική γλώσσα, η οποία συμπυκνώνει την ανθρώπινη γνώση για τη φύση. Επομένως, οι φυσικές επιστήμες έχουν σκοπό να συλλάβουν και να διατυπώσουν τους θεμελιώδεις νόμους της φύσης και αναπτύσσουν ιδιαίτερους δεσμούς με την αυστηρή συμβολική γλώσσα των Μαθηματικών, τα οποία παρέχουν το λογικό πλαίσιο ανάπτυξης και εδραίωσης των θεωριών της. Οι φυσικοί νόμοι μπορεί να έχουν ισχύ μόνο σε κάποια περιοχή της Φυσικής, ενώ οι φυσικές αρχές είναι γενικότερες διατυπώσεις για τον τρόπο λειτουργίας της φύσης και συμπεριλαμβάνονται στα θεμέλια της Φυσικής. Για τη διάκριση μεταξύ των νόμων και των φυσικών αρχών, ας θεωρηθεί ως παράδειγμα ένα πλοίο που ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα. Η αρχή της σχετικότητας δηλώνει πως οι νόμοι της Φυσικής που αντιλαμβάνονται οι άνθρωποι στο καράβι πρέπει να είναι ίδιοι με αυτούς που ανακαλύπτονται από άλλους στην ξηρά, χωρίς να γίνεται αναφορά σε ορισμένους μόνο νόμους.

Οι φυσικοί νόμοι δεν αποτελούν συμβάσεις, αλλά έχουν οντολογικό αντίκρισμα. Με διαφορετική διατύπωση, αυτοί είναι η μεταφορά, μέσω συμβολικής γλώσσας και με μαθηματικούς φορμαλισμούς, αντικειμενικών σχέσεων, διεργασιών και οντοτήτων (Μπιτσάκης, 1987). Οι επιστημονικές προτάσεις αποτελούν τη θεωρητική γενίκευση της εμπειρίας, την οποία συχνά υπερβαίνουν ή και διαψεύδουν. Με τη μελέτη των κειμένων των επιστημόνων στις αρχές του 20^{ου} αιώνα διαφαίνεται πως αυτά αναφέρονται ουσιαστικά στο καντιανό φιλοσοφικό πλαίσιο, δηλαδή η κατανόηση της φύσης νομιμοποιείται φιλοσοφικά υπό τους όρους του καντιανού οικοδομήματος (Μαυρίδης *et al.*, 2004). Σχηματικά, οι όροι αυτοί συνίστανται στο γεγονός πως οι επιστήμονες διαθέτουν ένα είδος προεμπειρικής *a priori* εποπτείας κατά τον Kant, ενώ παράλληλα αποκαλύπτουν ένα προεμπειρικά δεδομένο σύνολο *a priori* κατηγοριών βάσει των οποίων μορφώνονται τα δεδομένα των αισθήσεών μας (Broad, 1978). Αυτό που επιδιώκετε κατά τη μελέτη οντολογικών ή επιστημονικών θεμάτων αποτελεί η απαλλαγή από την ανασφάλεια της άγνοιας και της έλλειψης κατανόησης.

Σύμφωνα με τον Henri Poincaré (1854-1912), στο κλασικό του έργο *La valeur de la science* (εκδόθηκε το 1905), η μαθηματική επιστήμη δεν αποτελεί ένα μεθοδολογικό εργαλείο μελέτης της φύσης, αλλά έχει έναν φιλοσοφικό και αισθητικό σκοπό, ενώ οφείλει να βοηθά τον φιλόσοφο να εμβαθύνει στις έννοιες του αριθμού, του χώρου και του χρόνου. Οι



μυημένοι στα Μαθηματικά θαυμάζουν την λεπτεπίλεπτη αρμονία των αριθμών και των μορφών. Οι φυσικοί νόμοι συνάγονται από το πείραμα και διατυπώνονται στην ειδική γλώσσα του μαθηματικού φορμαλισμού, ενώ η συνηθισμένη γλωσσική ικανότητα των ανθρώπων είναι πενιχρή, ασαφής και ανεπαρκής να εκφράσει τόσο ακριβείς σχέσεις. Ακολουθώντας και μια επιφανειακά διαφορετική γραμμή, συχνά ο Paul Dirac (1902-1984) αναφερόταν θετικά στην ευρετική δύναμη της μαθηματικής ομορφιάς: «ο ερευνητής, στην προσπάθειά του να εκφράσει τους θεμελιώδεις νόμους της Φύσης με μαθηματική μορφή, θα έπρεπε να επιδιώκει μόνο τη μαθηματική ομορφιά. Συχνά συμβαίνει οι απαιτήσεις της απλότητας και της ομορφιάς να είναι οι ίδιες, αλλά όπου δεν συμφωνούν θα πρέπει να υπερισχύουν οι απαιτήσεις για ομορφιά». Επίσης, σε κάποιο κείμενό του δήλωσε: "είναι αρκετά ξεκάθαρο πως η ομορφιά για κάθε επιμέρους κατηγορία (λογοτεχνία, ποίηση κ.ά.) καθορίζεται από τη μόρφωση και την ανατροφή του κάθε ατόμου... Η μαθηματική ομορφιά είναι διαφορετικής φύσης. Θα έπρεπε να πω ότι ίσως είναι τελείως διαφορετικής φύσης και υπερβαίνει αυτούς τους προσωπικούς παράγοντες. Αυτή η ομορφιά είναι ίδια σε όλους τους τόπους και κάθε χρονική περίοδο" (Kragh, 1990). Αυτή είναι μια ακόμα πηγή της εμπιστοσύνης του Dirac στην ομώνυμη εξίσωσή του: ήταν και παραμένει εξαιρετικά ωραία (Dirac, 1939). Μάλιστα, ο Poincaré εξυμνεί την επιστήμη της αστρονομίας ως την απόλυτη έκφραση της μεγαλειώδους επιτυχίας των Μαθηματικών για την κατανόηση του φυσικού γίνεσθαι. Η αστρονομία είναι χρήσιμη διότι υψώνει το ανθρώπινο πνεύμα πάνω από τους εαυτούς μας. Εκείνη καταδεικνύει πόσο μικρός είναι ο άνθρωπος στο σώμα, αφού τη λαμπρή απεραντοσύνη μέσα στην οποία το σώμα του δεν είναι παρά ένα σκοτεινό σημείο, η διάνοιά του μπορεί να την αγκαλιάσει ολόκληρη και να γευτεί τη σιωπηλή αρμονία της. Η αστρονομία επέδειξε την ύπαρξη φυσικών νόμων, αναμφίβολα αυτοί οι νόμοι της πειθαρχίας διέφευγαν από τους πρώτους πολιτισμούς, αλλά το αρμονικό θέαμα της αστροφώτιστης νύχτας αρκούσε για να τους μεταδώσει την εντύπωση της κανονικότητας. Η επιστήμη αυτή διευκόλυνε το έργο άλλων επιστημών, πιο άμεσα χρήσιμων, καθιστώντας το πνεύμα μας ικανό να κατανοεί τη φύση (Poincaré, 1997). Δυστυχώς, είναι εξαιρετικά δύσκολο να διευκρινιστεί και αδύνατο να μεταδοθεί στον μη ειδικό αναγνώστη η φύση της μαθηματικής ομορφιάς. Όμως, μπορεί να χαραχθεί μια αναλογία με διαφορετικά είδη ομορφιάς. Ένα από τα χαρακτηριστικά που μπορούν να κάνουν ένα κομμάτι μουσικής, ένα μυθιστόρημα ή ένα θεατρικό έργο όμορφο είναι η συσώρευση έντασης μεταξύ σημαντικών και σωστά ανεπτυγμένων θεμάτων που κορυφώνεται σε μια πειστική και απροσδόκητη λύση. Ένα χαρακτηριστικό που μπορεί να κάνει ένα γλυπτό ή ένα αρχιτεκτονικό δημιούργημα όμορφο είναι η συμμετρία –η εξισορρόπηση των αναλογιών, η περιπλοκότητα που εξυπηρετεί ένα σκοπό. Η εξίσωση του Dirac, για παράδειγμα, περιλαμβάνει και τα δύο αυτά χαρακτηριστικά στο μέγιστο βαθμό.

Οι σπουδαίες εξισώσεις, όπως και τα τελειότερα ποιήματα, διαθέτουν, εκτός των άλλων, και μια εξωπραγματική δύναμη. Η ποίηση είναι η πιο συνεκτική και περιεκτική μορφή του γραπτού λόγου, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που οι σπουδαίες εξισώσεις της επιστήμης είναι η πιο περιεκτική έκφραση της φυσικής πραγματικότητας που περιγράφουν. Για παράδειγμα, η εξίσωση $E = mc^2$ είναι από μόνη της πανίσχυρη: τα λιγοστά της σύμβολα συμπυκνώνουν μια γνώση που εφαρμόζεται σε κάθε ενεργειακή μετατροπή. Επιπροσθέτως,



διαφαίνεται πως ίσχυε ακόμα και στην αυγή του χρόνου. Με τον ίδιο τρόπο που η προσεκτική μελέτη μιας σπουδαίας εξίσωσης δίδει σταδιακά τη δυνατότητα στους επιστήμονες να διακρίνουν πράγματα που αρχικά είχαν αγνοήσει, η επαναλαμβανόμενη ανάγνωση ενός σπουδαίου ποιήματος εξάπτει κατά κανόνα νέα συναισθήματα και δημιουργεί νέους συνειρμούς. Οι σπουδαίες εξισώσεις τροφοδοτούν την κατάλληλα προετοιμασμένη φαντασία με ερεθίσματα εξίσου πλούσια με αυτά ενός ποιήματος. Βέβαια, οι αναλογίες μεταξύ της ποίησης και των επιστημονικών εξισώσεων δεν ταυτίζονται πλήρως. Κάθε ποίημα γράφεται σε μια συγκεκριμένη γλώσσα και χάνει τη μαγεία του μέσω της μετάφρασης, αντίθετα με μια εξίσωση που είναι διατυπωμένη στην παγκόσμια γλώσσα των Μαθηματικών: η $E = mc^2$ είναι ίδια σε κάθε γλώσσα. Επίσης, οι ποιητές αναζητούν πολλαπλά νοήματα και αλληλεπιδράσεις μεταξύ λέξεων και σκέψεων, ενώ οι επιστήμονες στοχεύουν να αποδίδουν οι εξισώσεις ένα και μόνο λογικό νόημα.

Το αίνιγμα για την αιτία που οι πιο θεμελιώδεις νόμοι μπορούν να γραφούν τόσο βολικά ως εξισώσεις, ως απόλυτοι κανόνες που δηλώνουν πως φαινομενικά άσχετες ποσότητες είναι ισοδύναμες, έχει απασχολήσει στρατιές στοχαστών. Δεν είναι καν σαφής ο λόγος της ύπαρξης θεμελιωδών νόμων εν γένει. Ακόμη δυσκολότερο από το ερώτημα για την προέλευση των επιστημονικών εξισώσεων είναι το ερώτημα εάν οι εξισώσεις εφευρίσκονται ή ανακαλύπτονται. Ο αστροφυσικός Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995) πιθανότατα εκφραζόταν εκ μέρους των περισσότερων μεγάλων θεωρητικών παρατηρώντας πως όταν ανακάλυπτε κάποιο νέο γεγονός ή είχε μια έμπνευση, αισθανόταν σαν να «...ήταν πάντα εκεί και εγώ έτυχε να το παρατηρήσω». Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση, οι εξισώσεις που βρίσκονται πίσω από τις διαδικασίες του σύμπαντος κατά κάποιο τρόπο υπάρχουν "κάπου εκεί", ανεξαρτήτως από την ύπαρξη των ανθρώπων. Οπότε, οι επιστήμονες είναι κοσμικοί αρχαιολόγοι, οι οποίοι προσπαθούν να ξεθάψουν νόμους που παραμένουν κρυμμένοι από την αυγή του χρόνου. Η προέλευση αυτών των νόμων παραμένει μυστηριώδης.

Η υποκειμενική θεώρηση της ομορφιάς δεν είναι ευπρόσδεκτη στους κύκλους των καλλιεργημένων διανοουμένων και είναι βέβαιο πως δεν έχει θέση στις ακαδημαϊκές κριτικές της υψηλής τέχνης. Ωστόσο, είναι μια λέξη που πρόθυμα ανεβαίνει στα χείλη όλων μας, ακόμα και των πιο σχολαστικών κριτικών, όταν συγκινούμαστε από τη θέα ενός συναρπαστικού ορεινού τοπίου, μιας εξαίσιας ορχιδέας. Θεμελιακά, η έκφραση "μια εξίσωση είναι ωραία" σημαίνει πως αυτή περιλαμβάνει στα χαρακτηριστικά της κάτι πολύ περισσότερο από απλή ελκυστικότητα –έχει απλότητα, οικουμενικότητα, την αίσθηση του νομοτελειακού, καθώς και μια πρωτόγονη δύναμη. Μια πρόσθετη ιδιότητα της άρτιας επιστημονικής εξίσωσης είναι πως αυτή έχει λειτουργική ομορφιά. Πρέπει να περιλαμβάνει τα αποτελέσματα κάθε σχετικού πειράματος και ακόμα καλύτερα να κάνει προβλέψεις. Αυτή η όψη της αποτελεσματικότητας μιας εξίσωσης είναι συναφής με την ομορφιά μιας άρτια κατασκευασμένης μηχανής.

Για τους υπόλοιπους ανθρώπους, ένας τέτοιος αισθητικός ελιτισμός αποτελεί ένα σκληρό και μη παραγωγικό πιστεύω. Συνήθως, για τους περισσότερους επιστήμονες η ομορφιά δεν είναι ούτε μια έννοια που τους απασχολεί, ούτε ένας εξυπηρετικός οδηγός για την καθημερινή δουλειά τους. Είναι αληθές πως οι εξισώσεις που χρησιμοποιούν, έχουν μια υπολανθάνουσα ομορφιά και οι σωστές λύσεις των εξισώσεων αυτών είναι πολύ πιθανότερο



να είναι ωραίες παρά άσχημες. Ωστόσο, η ομορφιά μπορεί να είναι παραπλανητική. Η επιστήμη είναι διάστικτη με τα υπολείμματα θεωριών που κάποτε θεωρήθηκαν ωραίες, αλλά αποδείχτηκαν λανθασμένες. Αργότερα, οι φυσικοί, στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν την πληθώρα των νέων υποατομικών σωματιδίων, έσπευσαν να τα εντάξουν σε μαθηματικές κατηγορίες, οι περισσότερες από τις οποίες αποδείχθηκαν, παρά την επιφανειακή τους αρτιότητα, τελείως άσχετες με τη φύση.

Από την εποχή του Γαλιλαίου, η επιστήμη έχει σταδιακά και σταθερά μαθηματικοποιηθεί. Οι εξισώσεις αποτελούν πλέον ένα ιδιάζουσας σημασίας επιστημονικό εργαλείο. Οι περισσότεροι θεωρητικοί, ασφαλώς και οι περισσότεροι φυσικοί, πιστεύουν με φανατισμό ότι υπάρχει μια θεμελιώδης εξίσωση, η οποία περιγράφει το φαινόμενο που μελετούν ή ότι κάποιος κάποτε θα βρει την κατάλληλη εξίσωση. Ωστόσο, όπως και στον Feynman, μπορεί τελικά να αποδειχθεί πως οι θεμελιώδεις νόμοι της φύσης δεν έχουν ανάγκη να εκφραστούν με μαθηματικούς όρους και εκφράζονται καλύτερα με διαφορετικούς τρόπους. Προς το παρόν, διαφαίνεται πως οι εξισώσεις προσφέρουν τον πιο αποτελεσματικό τρόπο έκφρασης των περισσότερων θεμελιωδών νόμων (Wigner, 1960). Δεν είναι όμως, οι εξισώσεις η μέριμνα όλων των επιστημόνων, πολλοί από τους οποίους ανταπεξέρχονται ικανοποιητικά με μια στοιχειώδη μονάχα γνωριμία με τα Μαθηματικά. Κάποιοι φυσικοί γνωρίζουν αρκετά Μαθηματικά, πολλοί μηχανικοί εφαρμόζουν με εξαιρετικό τρόπο τα Μαθηματικά στη δουλειά τους και κάποιοι θεωρητικοί βιολόγοι είναι δεξιότεχνες μαθηματικοί. Ωστόσο, όπως κάθε καρικατούρα, το γεγονός αυτό περιέχει αρκετά σπέρματα αλήθειας. Οι μηχανικοί τείνουν να αντιμετωπίζουν χρηστικά τα Μαθηματικά και δίδουν μεγάλη βάση στην πραγματοποίηση καλών προσεγγίσεων. Επίσης, από όλες τις θετικές επιστήμες, η φυσική είναι η περισσότερο και η βιολογία η λιγότερο μαθηματικοποιημένη. Από την εποχή του Γαλιλαίου, οι φυσικοί έχουν ευδοκιμήσει απλοποιώντας τα ζητήματα, διασπώντας τις πολυπλοκότητες της καθημερινής πραγματικότητας στα απλούστερα συστατικά στοιχεία τους. Μια τέτοια υπεραπλούστευση δεν είναι πάντα εφικτή για τους βιολόγους, των οποίων ο τομέας δράσης είναι ο απέραντα πολύπλοκος ζωντανός κόσμος, με τις αλληλοσχετιζόμενες κοινωνίες οργανισμών, καθένας από τους οποίους έχει μια εξαιρετικά πολύπλοκη δομή σε μοριακό επίπεδο. Επίσης, δεν πρέπει να λησμονάτε το γεγονός πως η ενοποιητική θεωρία της βιολογίας είναι, επιφανειακά τουλάχιστον, μη μαθηματικοποιημένη. Η θεωρία του Charles Darwin (1809-1882) για την εξέλιξη μέσω της φυσικής επιλογής δεν περιέχει ούτε μια εξίσωση. Το ίδιο αληθεύει για τη θεωρία των γεωλόγων σχετικά με την κίνηση των τεκτονικών πλακών, των οποίων οι πρώιμες εργασίες, που εκδόθηκαν μετά το τέλος του Α' Παγκόσμιου Πολέμου, ήταν ουσιαστικά πεδίο ελεύθερο από εξισώσεις.

Στη σύγχρονη γνωστική παιδεία είναι γεγονός πως μπορούν να πραγματοποιηθούν μεγάλες γνωστικές κατακτήσεις χωρίς να χρησιμοποιηθούν Μαθηματικά. Η γνωστότερη περίπτωση είναι του Charles Darwin και της εξέλιξης των ειδών. Με αφετηρία μακροσκοπικές παρατηρήσεις, ο Darwin κατάφερε να κατασκευάσει το γενεαλογικό δέντρο της ζωής στη Γη, δηλαδή μια στέρεα δομημένη υπόθεση αναφορικά με τον τρόπο με τον οποίο επήλθε η εξέλιξη. Αρκεί να ξεφυλλίσει κανείς το έργο του για να αντιληφθεί πως τα Μαθηματικά δεν διαδραματίζουν κανένα ρόλο στην ανακάλυψη του Darwin. Παρ' όλα αυτά, τα συμπεράσματά του, τα οποία βασίζονται στη συγκριτική ανατομία, επιβεβαιώθηκαν από



έρευνες που πραγματοποιήθηκαν στο μοριακό επίπεδο. Ο Darwin ανακατασκεύασε την εξελικτική διαδικασία της ζωής στη Γη και επομένως μια βαθιά γνώση της πραγματικότητας είναι δυνατή, τουλάχιστον σε ορισμένες περιπτώσεις, ακόμα και όταν δεν κάνουμε χρήση των Μαθηματικών. Αυτό το συμπέρασμα ενισχύεται και από την εξέταση και άλλων ακόμη επιστημών, όπως είναι η γεωφυσική, που κάνουν μερική και πολύ περιορισμένη χρήση των μαθηματικών εργαλείων, ενώ παράλληλα καταγράφουν σημαντικές γνωστικές κατακτήσεις.

Τα μαθηματικά πρότυπα εντός του επιστημονικού γίγνεσθαι

Κατά την επιστημονική έρευνα είναι συχνά επιθυμητό να περιγραφεί η συμπεριφορά ενός φυσικού, κοινωνιολογικού ή ακόμα και οικονομικού συστήματος ή φαινομένου της πραγματικής ζωής με όρους των Μαθηματικών. Η μαθηματική περιγραφή ενός τέτοιου συστήματος ή φαινομένου ονομάζεται *μαθηματικό μοντέλο* ή *μαθηματικό πρότυπο* και αυτό οικοδομείται με κάποιες καθορισμένες γνωσιοθεωρητικές διαδικασίες. Για παράδειγμα, ίσως μας ενδιαφέρει για κάποιους λόγους να κατανοηθούν οι μηχανισμοί ενός συγκεκριμένου οικοσυστήματος μέσω της μελέτης της δυναμικής των πληθυσμών της πανίδας. Ίσως να ενδιαφερόμαστε για το χρόνο θανάτου ενός ανθρώπου κατά την ιατροδικαστική έρευνα ή ακόμα να επιθυμούμε τη χρονολόγηση απολιθωμάτων μέσω της ανάλυσης της αποσύνθεσης των σωματιδίων κάποιων ραδιοϊσοτόπων τόσο των ίδιων των απολιθωμάτων, όσο και του γεωλογικού στρώματος από το οποίο εξορύχθηκαν. Επομένως, η μαθηματική μοντελοποίηση είναι ουσιαστικά η αφηρημένη τέχνη της διαμόρφωσης των μαθηματικών μοντέλων από τα αντίστοιχα προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Ο κάτοχος της τέχνης αυτής οφείλει να συνδυάζει την πρακτική μεθοδολογία με την εμπειρία και οι ικανότητες αυτές δεν μπορούν να διδαχθούν με κάποιο προσιτό τρόπο, καθώς το ύφος των μαθηματικών μοντέλων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη βαθειά κατανόηση και γνώση του εκάστοτε επιστημονικού πεδίου, την αφαιρετική ικανότητα του επιστήμονα, το είδος των σχετικών προβλημάτων και την εμπειρία κατά την ενασχόληση με παρόμοια προβλήματα. Γενικά, μπορούν να ληφθούν διαφορετικά μοντέλα ακόμη και για την ίδια φυσική διεργασία. Αυτό συμβαίνει ανάλογα με την προσδιδόμενη έμφαση κάποιων παραμέτρων μιας φυσικής διαδικασίας, ενώ οι ίδιες ποσότητες θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως ασήμαντες σε άλλες διεργασίες ή διαφορετικά προβλήματα.

Η μοντελοποίηση αφορά τη διαδικασία διερεύνησης, μέσω κατασκευής προτύπου, των αντικειμένων και των σχέσεών τους στα πλαίσια της γνωσιακής προσπέλασης μιας περιοχής. Οι μορφές και οι τρόποι κατασκευής μοντέλου ποικίλλουν. Εξαρτώνται από το γνωσιακό αντικείμενο, από την προσδοκώμενη χρήση και από τη σφαίρα εφαρμογής του μοντέλου. Οι κατασκευές μοντέλων διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες: (α) σε κατασκευές υλικών μοντέλων και σε (β) κατασκευές ιδεατών μοντέλων. Σχετικά με την πρώτη κατηγορία, η κατασκευή έχει ως βασικό της χαρακτηριστικό την αναπαραγωγή και αναπαράσταση γεωμετρικών, φυσικών, δυναμικών και λειτουργικών χαρακτηριστικών του αντικειμένου της μοντελοποίησης. Σχετικά με τη δεύτερη κατηγορία, δηλαδή την κατασκευή ιδεατού μοντέλου, ως υλικά για την κατασκευή αυτή χρησιμοποιούνται σχήματα, σχέδια, τύποι, φράσεις σε κάποιο αλφάβητο φυσικής ή τεχνητής γλώσσας, εννοιακά συστήματα κ.ά. Βασικά χαρακτηριστικά της δεύτερης αυτής κατηγορίας είναι η σχηματοποίηση, η



εξιδανίκευση, η μεταφορά κ.ά. Σχετική με τη μεταφορά από μια γνωσιακή περιοχή σε άλλη είναι η ειδική περίπτωση της κατασκευής αναλογικού μοντέλου, ενώ κύριο χαρακτηριστικό της κατασκευής αυτής είναι η περιγραφή πρωτοτύπου και μοντέλου με τις ίδιες μαθηματικές σχέσεις. Για παράδειγμα, η ίδια ομάδα διαφορικών εξισώσεων είναι δυνατόν να περιγράψει φυσικές συμπεριφορές σε διαφορετικά γνωσιακά πεδία. Επομένως, ηλεκτρικά μοντέλα (με την έννοια των ταυτώσεων διαφορικών εξισώσεων) χρησιμοποιούνται για τη μελέτη μηχανικών, υδροδυναμικών, ακουστικών κ.ά. φαινομένων. Βασική ομάδα κατασκευών ιδεατών μοντέλων είναι αυτή που αναφέρεται στα μαθηματικά και στη λογική, δηλαδή με υλικά ιδεατής προέλευσης και με σημείο εκκίνησης τη συντακτική δομή μιας τυπικής γλώσσας κατασκευάζονται συστήματα που αντιγράφουν, κατά κάποιον τρόπο, τη γνωσιακή δομή της απόδειξης, μετατρέποντάς την συγχρόνως σε γνωσιακή δομή επαλήθευσης. Δεδομένου ότι οι πράξεις με σύμβολα συνδέονται με την κατανόηση και αντίστοιχη έκφραση των συμβολικών κατασκευών και των μετασχηματισμών τους, η κατασκευή αντίστοιχων ιδεατών μοντέλων αφορά στη νοητική και εποπτική παράσταση των συμβόλων και των πράξεών τους, ώστε αυτά να αποτελούν το σημασιολογικό αντίστοιχο του συντακτικά προσδιορισμένου παιχνιδιού των συμβόλων.

Εννοιολογικός ορισμός των μαθηματικών προτύπων

Ο όρος *μοντέλο* έχει πολλαπλές σημασίες, μερικές από τις οποίες είναι οι παρακάτω: (α) Ένα μοντέλο είναι δυνατόν να είναι ένα ισομορφικό ή ομομορφικό ομοίωμα ενός πρωτοτύπου, που κατασκευάζεται είτε για να παρασταθεί ακριβώς και μέσω της παράστασης να εξετασθεί το πρωτότυπο, είτε για να απεικονισθεί κατ' αναλογία το πρωτότυπο, ώστε εξιδανικευμένο και χωρίς περιττά χαρακτηριστικά να μελετηθεί ως προς τα ενδιαφέροντα σημεία του. (β) Ένα μοντέλο είναι ένα πρότυπο που, ανεξάρτητα από την προέλευση του, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για την αναπαραγωγή και αντιγραφή του. (γ) Ένα μοντέλο, στα πλαίσια των επιστημών, είναι μια κατασκευή που μπορεί μέσω αναλογικών τρόπων σκέψης να μεταφερθεί από μια επιστημονική περιοχή σε μια άλλη και να χρησιμοποιηθεί παράγοντας νέα γνώση στα πλαίσια του νέου γνωσιακού περιβάλλοντος. (δ) Ένα μοντέλο μπορεί να είναι μια κατασκευή που παίζει τον ρόλο πρακτικής ή θεωρητικής αναπαράστασης μιας εξήγησης ή ενός εξηγητικού μηχανισμού που αναφέρεται σε ένα σύνολο φαινομένων. Τέτοια μοντέλα, για παράδειγμα, είναι τα συστήματα μαθηματικών ισχυρισμών (αξιωμάτων), τα οποία, εφοδιασμένα με συγκεκριμένο πληροφοριακό και πολλές φορές εμπειρικό περιεχόμενο, χρησιμοποιούνται για την περιγραφή και εξήγηση κάποιας περιοχής εμπειρικών ή νοητικών αντικειμένων και σχέσεων. Τέτοιες περιοχές μπορεί να είναι η φυσική, η κοσμολογία, η οικονομία κ.λπ. (ε) Στα πλαίσια της λογικής, η έννοια του μοντέλου ανήκει στα σημασιολογικά (ή σημαντικά) περιεχόμενα μιας τυπικής γλώσσας. Στη συντακτική πλευρά της γλώσσας αυτής ανήκουν η περιγραφή των συμβόλων της, των κανόνων σχηματισμού των όρων και τύπων της, των αξιωμάτων, λογικών ή μη λογικών, καθώς και των συμπερασματικών κανόνων της. Στην πλευρά αυτή, δηλαδή, ανήκουν όλα τα χαρακτηριστικά μιας τυπικής γλώσσας, τα οποία συνδέονται με την έννοια της απόδειξης. Στη σημασιολογική πλευρά της ανήκουν εκείνα τα χαρακτηριστικά που συνδέονται με την έννοια της αλήθειας.



Βέβαια, η εννοιολογική χρήση του όρου "μοντέλο" μπορεί να περιλαμβάνει μια ευρεία ποικιλία αντικειμένων και μορφών, κατάλληλα για κάθε κλάδο των θετικών επιστημών. Για παράδειγμα, ένα αρχιτεκτονικό σχέδιο, μια μακέτα ενός κτιρίου, μια διαφορική εξίσωση ή ένα υπολογιστικό μετεωρολογικό λογισμικό για την πρόγνωση του καιρού μπορούν να αποτελούν μοντέλα της πραγματικότητας, παρά το γεγονός πως δεν υπάρχει μία κοινή οντολογική υπόσταση μεταξύ αυτών των προσεγγίσεων. Σε γενικές γραμμές, δεν υπάρχει ένας κοινά αποδεδειγμένος και αυστηρός ορισμός για την έννοια του μοντέλου. Σε διάφορους γνωστικούς τομείς, το μοντέλο ή πρότυπο αποτελεί μια αναπαραστάση προσδιορισμένων φαινομένων με ένα ερμηνευτικό σχήμα (φυσικό μοντέλο) ή την περιγραφή συσχετίσεων με ένα φορμαλιστικό ύφος (μαθηματικό μοντέλο). Ειδικότερα, μπορεί να ορισθεί ως η ορθολογική μαθηματική δομή για να αποδοθεί σε μια προσδιορισμένη συμβολική γλώσσα (φυσική, τεχνητή ή γλώσσα των ηλεκτρονικών υπολογιστών) το πλέγμα των σχέσεων που επαληθεύονται για ένα σύνολο φαινομένων, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι πιθανές σχέσεις αιτιότητας μεταξύ τους. Συνεπώς, τα μοντέλα δεν είναι ερμηνείες, δεδομένου πως μια ερμηνεία πρέπει να αποδίδει μηχανισμούς ή σχέσεις αιτιότητας. Αντίθετα, πρόκειται για νοητικά σχήματα που ο ανθρώπινος νους επιβάλλει στο φυσικό ή το πολιτιστικό περιβάλλον προκειμένου να αποκτήσει πρόσθετες γνώσεις. Ειδικά για ένα μαθηματικό μοντέλο, ο Minsky (1965) διετύπωσε τον ακόλουθο γενικό ορισμό: "για ένα παρατηρητή B , ένα αντικείμενο A αποτελεί ένα μοντέλο του αντικειμένου A στο βαθμό που ο παρατηρητής B μπορεί να χρησιμοποιήσει το A ώστε να απαντήσει τα ερωτήματα που τον απασχολούν σχετικά με το A ". Ένας εναλλακτικός ορισμός δύναται να θεωρηθεί ο ακόλουθος: "μαθηματικό μοντέλο αποτελεί η τριάδα (Σ, Y, M) , όπου Σ αποτελεί το εξεταζόμενο φυσικό σύστημα, Y είναι οι υποθέσεις και τα υπό διερεύνηση ερωτήματα, τα οποία σχετίζονται με το σύστημα Σ , ενώ $M=[\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n]$ αποτελεί το σύνολο των μαθηματικών μεθοδολογικών εργαλείων για την επίλυση των ερωτημάτων Y " (Velten, 2009). Βέβαια, ανάλογοι ορισμοί μπορεί να εκφραστούν και για διάφορα γνωστικά επιστημονικά πεδία, όπως στην οικονομία.

Η έννοια του επιστημονικού μοντέλου μπορεί να κατανοηθεί με τη διάκριση ανάμεσα στις φιλοσοφικές απόψεις του ρεαλισμού και της εργαλειοκρατίας. Ο ρεαλισμός αποτελεί τη θεωρία που πρεσβεύει ότι οι καρποί της επιστήμης όχι μόνο είναι λειτουργικοί και επιτρέπουν την παραγωγή προβλέψεων ακριβείας, αλλά πως πράγματι αναπαριστούν και/ή περιγράφουν την πραγματική κατάσταση της φύσης, όπως τη γνωρίζει κάποια οντότητα με παντογνωσία. Βεβαίως, ένας από τους κύριους περιορισμούς της επιστήμης αποτελεί το γεγονός ότι η "αληθινή" φύση της πραγματικότητας είναι απρόσιτη, διότι δεν υπάρχει κάποια οντότητα με παντογνωσία για να ερωτηθεί. Η επιστήμη επινοήθηκε, τουλάχιστον εν μέρει, για να απαντήσει σε ερωτήματα σχετικά με το φυσικό κόσμο και προσεγγίζει την "αλήθεια" όσο αυτό είναι δυνατό, όμως δεν υπάρχουν εγγυήσεις ή επικυρώσεις για την επιτυχία αυτής της προσπάθειας. Μια ακόμη φιλοσοφική επιταγή αποτελεί το γεγονός πως όταν οι επιστημονικές ιδέες έχουν ικανοποιητική εφαρμογή και αποτελούν σύμφωνες με τα εμπειρικά δεδομένα, τότε δεν ενοχλεί εάν αυτές ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα, δηλαδή είναι εποικοδομητικές και εμπειριστατωμένες.

Γνωσιολογικός ορισμός των γεγονότων



Γενικά, θεωρείται συχνά πως οι επιστήμονες εργάζονται επάνω σε γεγονότα και ότι η ανθρώπινη γνώση εδράζεται σε αυτά (Davies, 1968). Τα ερμηνευτικά λεξικά ορίζουν ως "γεγονός" «αυτό που δεν μπορεί να κριθεί υποκειμενικά και έχει έναν οικουμενικό χαρακτήρα. Ακόμη, γεγονός αποτελεί αυτό που έχει πράγματι συμβεί ή αποτελεί την αλήθεια, την πραγματικότητα». Ας θεωρηθεί, για παράδειγμα, το κατά τα φαινόμενα απλό γεγονός της ανατολής του Ηλίου. Καθημερινά καταγράφονται νέες ενδείξεις που επαληθεύουν το συγκεκριμένο γεγονός. Είμαστε σχεδόν πεπεισμένοι πως ο Ήλιος θα ανατείλει την επόμενη ημέρα, αλλά υπάρχει μια μακρινή πιθανότητα ότι κάποια στιγμή στο απώτερο μέλλον αυτό μπορεί και να μη πραγματοποιηθεί. Πράγματι, σε μια χρονική κλίμακα που εκτείνεται έως την αιωνιότητα, μπορούμε να βεβαιωθούμε πως κάποτε η ενέργειά του θα εξαντληθεί και εικάζουμε ότι τελικά δεν θα υπάρχει να φωτίζει τις κοινότητές μας. Παρά τα φαινόμενα, ακόμη και απτά γεγονότα, όπως αυτό της ανατολής του Ηλίου, επιδέχονται ερμηνείας. Σύμφωνα με τη νεκρή σήμερα υπόθεση «επίπεδη Γη – κινούμενος Ήλιος», η κίνηση του Ήλιου στον ουρανό θεωρούνταν από την οπτική γωνία μιας σταθερής Γης στο κέντρο του σύμπαντος. Πράγματι, οι αναφορές στην ανατολή και τη δύση του Ήλιου βασίζονται σε αυτή την ερμηνεία, η οποία υποστηρίζεται από τις επιπόλαιες κοινότοπες αντιλήψεις μας. Ωστόσο, η ιδέα του κινούμενου Ήλιου έχει αντικατασταθεί από μια έτερη υπόθεση. Η κατανόηση των κοσμικών γεγονότων διευρύνεται σημαντικά όταν θεωρήσουμε τον Ήλιο ακίνητο στο κέντρο του πλανητικού μας συστήματος και τη Γη μια σφαίρα που περιστρέφεται γύρω από ένα αστέρι. Ίσως κάποτε κάποιο ισχυρότερο μοντέλο αντικαταστήσει την παρούσα υπόθεση εργασίας που "ερμηνεύει" την ανατολή.

Διαφορετικά, δυνάμει της ουσίας της, η επιστήμη χειρίζεται σημεία, με τα οποία υποκαθιστά τα ίδια τα αντικείμενα. Αναμφίβολα αυτά τα σημεία διαφέρουν από εκείνα της γλώσσας λόγω της μεγαλύτερης ακρίβειας και αποτελεσματικότητάς τους. Ωστόσο, δεν παύουν να υπάγονται και αυτά στη γενική προϋπόθεση του σημείου που συνίσταται στο να δηλώσουμε μια πάγια όψη της πραγματικότητας με μια σταθερή μορφή. Για να σκεφθούμε την κίνηση, απαιτείται μια προσπάθεια του πνεύματος, η οποία να ανανεώνεται αδιαλείπτως. Τα σημεία πλάστηκαν για να μας απαλλάξουν από αυτή την προσπάθεια υποκαθιστώντας την κινούμενη συνέχεια των πραγμάτων με μια τεχνητή ανασύνθεση, η οποία ισοδυναμεί με αυτήν στην πράξη και έχει το πλεονέκτημα πως είναι ευκολοδιαχειρίστη. Ο ουσιώδης ρόλος της επιστήμης είναι να αυξήσει την επίδρασή μας στα πράγματα. Η επιστήμη μπορεί να είναι θεωρητική κατά τη μορφή, ανιδιοτελής στους άμεσους σκοπούς της και θα αποσκοπεί πάντα, εν τέλει, στην πρακτική χρησιμότητα. Ακόμη και όταν ρίχνει το βάρος της στη θεωρία, η επιστήμη είναι υποχρεωμένη να προσαρμόζει τη συμπεριφορά της στη γενική διαμόρφωση της πρακτικής. Η δράση της επιστήμης σημαίνει αναπροσαρμογή και γνώση σημαίνει μετάβαση από μια κατάσταση σε μια άλλη, από μια διευθέτηση σε μια αναδιευθέτηση (Bergson, 1959).

Χαρακτηριστικά γνωρίσματα των μαθηματικών μοντέλων

Κάθε μοντέλο υποχρεούται να πραγματοποιεί απλουστευτικές παραδοχές –ορισμένα από αυτά στερούν την ακρίβεια προς χάριν της γενικότητας, ενώ άλλα θυσιάζουν τη γενικότητα προς όφελος της ακρίβειας. Ορισμένα μοντέλα θυσιάζουν ακόμη και ορισμένες πτυχές της



ίδιας της πραγματικότητας. Τα μοντέλα έχουν περιγραφεί ως απλές καρικατούρες της φύσης, υπολογισμένα να μεταλαμπαδεύσουν την ουσία της με μεγάλη οικονομία στη λεπτομέρεια. Κανένα μοντέλο δεν είναι "ορθό" ή "αληθές", το καθένα απλώς αντιπροσωπεύει μια συγκεκριμένη προσπάθεια μίμησης της πραγματικότητας και αποτελούν σε κάποιο βαθμό ανακριβή. Ουσιαστικά, τα μοντέλα είναι προσεγγίσεις της πραγματικότητας, καθώς εστιάζονται σε ορισμένες πλευρές της. Υπό αυτή την έννοια, η χημική δομή μιας ουσίας είναι ένα μοντέλο, καθώς δεν λαμβάνεται υπόψη η θέση της ως προς το χώρο και το χρόνο. Καθοριστικής σημασίας για τη χρηστικότητα ενός μοντέλου στις επιστήμες είναι η επιλογή των απόψεων ενός φαινομένου, οι οποίες είναι ουσιώδεις για μια θεωρία που το περιγράφει. Αυτές οι απόψεις πρέπει να απεικονίζονται στο μοντέλο. Κατά βάση, κάθε σύνθετο φαινόμενο στο φυσικό, βιολογικό ή τεχνολογικό τομέα υπόκειται σε ανάλυση με αναγωγή σε ένα μοντέλο (φυσικό ή μαθηματικό αν είναι δυνατόν να περιγραφεί μέσω μαθηματικών εξισώσεων). Συνηθέστερες και αποτελεσματικότερες είναι οι περιπτώσεις όπου συνδυάζεται η χρήση του μαθηματικού με τη χρήση του φυσικού μοντέλου, όπως συμβαίνει στη γλωσσολογία (ως μελέτη γλωσσικών δομών) και στη γεωμετρία.

Ένα επωφελές και κατάλληλο μοντέλο μορφοποιείται συνήθως ώστε να πλάθει ελέγξιμες προβλέψεις. Συνεπώς, τα περισσότερα δύνανται να αντιπαραβληθούν με την πραγματικότητα και να διαψευστούν, χωρίς να αποτελούν όλα τα μοντέλα διαψεύσιμα. Ορισμένα εννοιολογικά πρότυπα έχουν αποδειχθεί κατάλληλα σύμφωνα με ένα λογικώς έγκυρο παραγωγικό συλλογισμό, αν και δεν υποδεικνύουν κάποια δυνατή παρατηρησιακή απόφαση ως μέσο ελέγχου. Όταν η δυνατότητα πρόβλεψης ενός μοντέλου αποτυγχάνει, τότε αυτό είτε εξοστρακίζεται, είτε αναθεωρείται και τροποποιείται (Popper, 1959). Τα μοντέλα και οι υποθέσεις που δεν συμμορφώνονται σε ικανοποιητικό βαθμό με την πραγματικότητα αντικαθίστανται σταδιακά από εκείνα που αντικατοπτρίζουν καλύτερα τον πραγματικό κόσμο (Lakatos και Musgrave, 1970). Η επιστημονική μέθοδος είναι συνεπώς αυτορρυθμιζόμενη: συν τω χρόνω, η γνώση διευρύνεται, βελτιώνεται και εκλεπτύνεται, ώστε να αντανακλά με ακρίβεια την εξωτερική φυσική πραγματικότητα. Οι καλώς τεκμηριωμένες υποθέσεις μετασχηματίζονται σε συνεπείς θεωρίες.

Η επιστημονική μέθοδος περιλαμβάνει το στάδιο της ανάλυσης, της σύνθεσης, της επαγωγής κ.ά. (Chalmers, 1998). Επίσης, μεταξύ διαφόρων μορφών επιστημονικής αναπαράστασης, οι γνωσιοθεωρητικές διαδικασίες της αφαίρεσης, της εξιδανίκευσης και της προβλεπτικής ισχύος είναι απαραίτητες για την μορφοποίηση επιστημονικών μοντέλων. Η διάκριση μεταξύ αφαίρεσης και εξιδανίκευσης θεμελιώνεται μέσω της διάκρισης μεταξύ εξιδανίκευσης (ως γενικευμένου όρου) και προσέγγισης. Η μαθηματική προσέγγιση των φυσικών φαινομένων είναι συμμετρική έννοια, δηλαδή εάν αληθεύει πως "*η απεικόνιση A είναι κατά προσέγγιση αναπαράσταση του B*", τότε αληθεύει πως "*B είναι κατά προσέγγιση αναπαράσταση του A*". Αντίθετα, η εξιδανίκευση αποτελεί μη-συμμετρική έννοια, δηλαδή αν αληθεύει πως "*A είναι εξιδανικευμένη περιγραφή του B*", τότε δεν αληθεύει πως "*B είναι εξιδανικευμένη περιγραφή του A*". Επομένως, ο ορθότερος τρόπος για να αντιληφθεί κάποιος τις έννοιες της εξιδανίκευσης και της αφαίρεσης είναι να θεωρηθούν αυτές ως η ίδια γνωσιοθεωρητική διαδικασία που οδηγεί σε διαφορετικά μεταξύ τους αποτελέσματα.



Το χαρακτηριστικό της προβλεπτικής ισχύος αποτελεί μια κρίσιμη πτυχή για τον εννοιολογικό ορισμό του μοντέλου και σχετίζεται με την επιλογή των κύριων μηχανισμών του φυσικού συστήματος. Το μοντέλο θα πρέπει, δεδομένων των κατάλληλων παραμέτρων, να περιγράφει με ακρίβεια τη συμπεριφορά του συστήματος αναφοράς, ενώ θα πρέπει να προβλέπει τα χαρακτηριστικά εκείνα που δεν έχουν προβλεφθεί ή είναι άγνωστα κατά τη σχεδίασή του. Με τον τρόπο αυτό το μοντέλο χρησιμοποιείται ως μέσο πειραματισμού με την έννοια της επιστημονικής επαλήθευσης και μεγιστοποιεί την ωφελιμότητά του ως διανοητικό οικοδόμημα. Η επιστημολογική συγγένεια του επιτυχημένου μοντέλου με την ορθή επιστημονική θεωρία είναι προφανής, με τη διαφορά ότι για να αποτελεί ένα διανοητικό πλαίσιο μοντέλο και όχι θεωρία, θα πρέπει να έχει συγκεκριμένη υπόσταση (για παράδειγμα, υλοποίηση σε φυσικό μέσο ή λογισμικό) και να επιτρέπει άμεση και συγκεκριμένη αλληλεπίδραση με τον κατασκευαστή του.

Βέβαια, τα μαθηματικά μοντέλα διακρίνονται ως προς τη χρήση τους ανάλογα με το γεγονός εάν αυτά αναπτύσσονται από θεωρητικούς επιστήμονες, όπως είναι ένας μαθηματικός, χημικός ή ένας βιολόγος, είτε αυτά μορφοποιούνται από μηχανικούς (engineers), όπως είναι ένας πολιτικός μηχανικός, αεροναυπηγός κ.λπ. (Dym, 2004). Με βάση τη συγκεκριμένη οπτική, οι μηχανικοί ενδιαφέρονται για το σχεδιασμό και τη μοντελοποίηση μηχανικών διατάξεων και συστημάτων, ώστε να μπορούν να αναλύσουν και να προβλέψουν τη συμπεριφορά τους. Σύμφωνα με τον Simon (1999): "*ο σχεδιασμός είναι η ουσιώδης δραστηριότητα της επιστήμης των μηχανικών*". Παρά τις παράλληλες ατραπούς και τους κοινούς στόχους μεταξύ της επιστημονικής μεθόδου και του μηχανικού σχεδιασμού, υπάρχουν ουσιώδεις διαφορές στην προσέγγιση. Στο μηχανικό σχεδιασμό, οι επιθυμητές προβλέψεις υποθέτουν πως το αντικείμενο μελέτης θα εκτελεί την εργασία ικανοποιητικά το σκοπό λειτουργίας τους. Για παράδειγμα, θα πρέπει να εξασφαλίζετε πως ο τρόπος κατασκευής ενός αεροπλάνου θα καθιστά το μεταφορικό αυτό μέσο αξιόπλοο, ενώ η ανέγερση ενός κτηρίου οφείλει να πραγματοποιείται με έλεγχο της ασφάλειάς του έναντι σεισμικών καταπονήσεων. Παράλληλα, οι επιστήμονες και οι μηχανικοί της βιομηχανίας, οι οποίοι εμπλέκονται στη μαθηματική μοντελοποίηση, αποτελούν περισσότερο χρήστες των μοντέλων αυτών παρά δημιουργοί τους. Οι εμπνευστές των μαθηματικών μοντέλων εργάζονται κυρίως σε μικρές ομάδες υψηλής ειδίκευσης στα πλαίσια διαφόρων οργανισμών, όπως πανεπιστημίων ή εταιρείες μηχανικών (engineering software houses). Αυτό που τυπικά υλοποιεί ένας επιστήμονας ή μηχανικός κατά την παραγωγική εργασία του στις βιομηχανικές δραστηριότητες αποτελεί η διαδικασία έρευνας, ανάπτυξης και παραγωγής λογισμικού εντός ενός συγκεκριμένου περιβάλλοντος. Υπό αυτό το πρίσμα, μεγάλο τμήμα της δραστηριότητάς τους στοχεύει στη διαμόρφωση ενός λογισμικού εργαλείου για την αναπαράσταση της βιομηχανικής διαδικασίας. Επομένως, οι επιστήμονες και οι μηχανικοί, οι οποίοι χρησιμοποιούν τα μοντέλα, περιορίζονται από τις ακόλουθες απαιτήσεις: (α) να καθορίσουν λεπτομερώς τη γεωμετρία, τα διαστήματα του πεδίου ορισμού και τους βρόχους του προβλήματος, (β) να προσδιορίσουν τις υλικές ιδιότητες και τις αρχικές συνθήκες κάθε πεδίου ορισμού, (γ) να ορίσουν τις συνοριακές συνθήκες εξωτερικά και πιθανώς μεταξύ των επιμέρους πεδίων ορισμών, (δ) το χρονικό βήμα για τις πιθανές μεταβατικές ή περιοδικές διαδικασίες και προβλήματα. Τυπικά, οι μεγάλες εταιρίες και οργανισμοί, οι οποίες



ενεπλάκησαν με τη μοντελοποίηση, δημιούργησαν και ανέπτυξαν μια ομάδα επιστημόνων και μηχανικών για να εστιάσουν σε αυτό το πεδίο μελέτης. Η δραστηριότητα αυτή έχει ωριμάσει σε τέτοιο βαθμό, ώστε η εμπλεκόμενη αυτή ομάδα απορροφάται πλήρως κατά την επαγγελματική δραστηριότητα της συγκεκριμένης υπηρεσίας (Cross, 1994).

Ταξινόμηση των μαθηματικών μοντέλων

Τα μαθηματικά μοντέλα μπορούν να ταξινομηθούν βάσει διαφόρων κριτηρίων. Όσον αφορά τα μελετώμενα συστήματα, αυτά διακρίνονται με βάση τα ακόλουθα χαρακτηριστικά (Velten, 2009). (α) *Φυσικά και θεωρητικά συστήματα* (physical – conceptual systems): τα φυσικά συστήματα αποτελούν τμήμα της πραγματικότητας ή της φύσης, όπως ένα αυτοκίνητο ή ένα έντομο. Τα νοητικά και θεωρητικά συστήματα αποτελούν προϊόντα της διανοητικής προσπάθειας των επιστημόνων, όπως ένα σύνολο μαθηματικών αξιωμάτων. (β) *Φυσικά και τεχνητά συστήματα* (natural – technical systems): ένα φυσικό σύστημα αποτελεί τμήμα της φυσικής πραγματικότητας, ενώ ένα τεχνητό σύστημα αποτελεί ένα αεροπλάνο, ένα πλοίο κ.ά. Ένα παράδειγμα φυσικού συστήματος αποτελεί αυτό μεταξύ θηρευτή και θηράματος. (γ) *Στοχαστικά και αιτιοκρατικά συστήματα* (stochastic – deterministic systems): τα στοχαστικά συστήματα αφορούν τυχαίες διαδικασίες, όπως αποτελεί η πρόβλεψη του αποτελέσματος κατά τη ρίψη ενός ζαριού, ενώ τα αιτιοκρατικά συστήματα αφορούν φαινόμενα που μπορούν να περιγραφούν με απόλυτη ακρίβεια και να προβλεφθεί η συμπεριφορά τους, όπως η κίνηση των πλανητών για παράδειγμα. (δ) *Συνεχή και διακριτά συστήματα* (continuous – discrete systems): τα συνεχή συστήματα περιλαμβάνουν ποσότητες που μεταβάλλονται κατά ένα συνεχή τρόπο σε συνάρτηση με το χρόνο, όπως η αναλογία ζάχαρης και αιθανόλης κατά τη ζύμωση του οίνου σε ένα βαρέλι. Τα διακριτά συστήματα αφορούν ποσότητες που μεταβάλλονται σε διακριτά χρονικά διαστήματα, όπως είναι τα δημογραφικά χαρακτηριστικά ενός κράτους. (ε) *Διάσταση* (dimension): τα φυσικά συστήματα μπορούν να περιγραφούν με βάση τις χωρικές διαστάσεις στις οποίες εξελίσσονται, δηλαδή σε μονοδιάστατα, επίπεδα ή τρισδιάστατα χωρία. (στ) *Πεδίο εφαρμογής* (field of application): τα συστήματα μπορούν να διακριθούν ανάλογα με το γνωστικό πεδίο στο οποίο αναφέρονται, δηλαδή σε χημικά, βιολογικά συστήματα κ.ά.

Τα αναπτυσσόμενα μαθηματικά μοντέλα διακρίνονται με βάση τα ακόλουθα χαρακτηριστικά (Velten, 2009). (α) *Φαινομενολογικά και μηχανιστικά πρότυπα* (phenomenological – mechanistic models): τα φαινομενολογικά πρότυπα οικοδομούνται με βάση πειραματικά δεδομένα, χωρίς a priori πληροφορίες για τα μελετώμενα συστήματα. Τα μηχανιστικά πρότυπα χρησιμοποιούν a priori πληροφορίες σχετικά με τις λαμβανόμενες διαδικασίες του μελετώμενου συστήματος. (β) *Στατικά και μη στατικά πρότυπα* (stationary – instationary models): τα στατικά πρότυπα δεν λαμβάνουν υπόψη τους το χρόνο κατά τη μεταβολή ενός μελετώμενου συστήματος. (γ) *Χρονοεξαρτώμενα και τοπικά ή χωρικά κατανεμημένα πρότυπα* (lumped – distributed models): τα χωρικά κατανεμημένα πρότυπα αφορούν τα συστήματα στα οποία οι χωρικές διαστάσεις λαμβάνονται υπόψη σε αντίθεση με τα συσσωρευμένα πρότυπα. (δ) *Ευθύ και αντίστροφα πρότυπα* (direct – inverse models): το ευθύ πρότυπο αφορά το σύστημα όπου με βάση τα δεδομένα και τις παραμέτρους του μελετώμενου προβλήματος εξάγεται η λύση του. Εάν διαθέτουμε τη λύση ενός φυσικού



προβλήματος και προσπαθούμε να αποσαφηνιστούν τα αρχικά δεδομένα, οι αρχικές υποθέσεις ή οι αρχικές παράμετροι του προβλήματος, τότε έχουμε ένα αντίστροφο πρόβλημα. (ε) *Ερευνητικά και διαχειριστικά πρότυπα* (research – management models): τα ερευνητικά πρότυπα μελετούν τα φυσικά φαινόμενα για την κατανόησή τους με βάση αυστηρά επιστημονικά κριτήρια, ενώ τα διαχειριστικά πρότυπα επικεντρώνονται στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων των μελετώμενων συστημάτων. Για παράδειγμα, το μαθηματικό πρότυπο μεταξύ θηρευτή και θηράματος είναι ένα ερευνητικό σύστημα, ενώ η διαχείριση των πληθυσμιακών συγκεντρώσεων του θηρευτή και τους θηράματος αποτελεί μια διαχειριστική διαδικασία. (στ) *Συλλογιστικά και σχεδιαστικά πρότυπα* (speculation – design models): τα συλλογιστικά πρότυπα αφορούν κυρίως τους θεωρητικούς επιστήμονες, όπως τους φυσικούς, χημικούς, βιολόγους κ.λπ., ενώ τα σχεδιαστικά πρότυπα αφορά κυρίως τις επιστήμες των μηχανικών, όπως τους τοπογράφους κ.λπ. (ζ) *Κλίμακα* (scale): κάθε μαθηματικό πρότυπο περιγράφει ένα φυσικό σύστημα στη βάση μιας κατάλληλης κλίμακας. Για παράδειγμα, μπορεί να μας ενδιαφέρει να μοντελοποιήσουμε ένα στοιχειώδες σωματίδιο ρευστού κατά την πορεία του μέσα από ένα πορώδες υλικό. Αντίθετα, μπορεί να ενδιαφερόμαστε για τον υπολογισμό της πίεσης μιας σταγόνας που ευρίσκεται σε ένα πορώδες και διαπερατό μέσο. Επομένως, ένα σημαντικό θέμα στη μαθηματική μοντελοποίηση είναι η ικανότητα της εκτίμησης της τάξης μεγέθους (όχι οι ακριβείς αριθμοί) ορισμένων ποσοτήτων. Εάν γνωρίζουμε την τάξη μεγέθους των διαφόρων ποσοτήτων και το διάστημα της απόκλισης, τότε μπορούμε να επιλεγεί η ορθή κλίμακα για να γραφεί το μαθηματικό μοντέλο σε μια αδιάστατη μορφή και να επιλεγθούν οι κατάλληλες μαθηματικές μέθοδοι για την επίλυση του προβλήματος. Επίσης, με τον τρόπο αυτό μπορούν να επιλεγούν οι κατάλληλες μαθηματικές αριθμητικές μέθοδοι για τη λύση του φυσικού προβλήματος. Συχνά, οι εκτιμήσεις χαρίζουν μεγαλύτερη διαίσθηση για την κατανόηση της φυσικής διαδικασίας, με αποτέλεσμα να προκύπτουν ακριβέστερα μαθηματικά μοντέλα. Για παράδειγμα, κατά τη μελέτη των τεκτονικών πλακών, θα πρέπει να επιλεγούν οι ορθές φυσικές κλίμακες, δηλαδή οι δυνάμεις και το πάχος του μανδύα. Βέβαια, οι πραγματικές φυσικές διαδικασίες είναι εξαιρετικά περίπλοκες και εξακολουθεί να αποτελούν ένα εν εξελίξει πεδίο έρευνας.

Όσον αφορά τη μαθηματική περιγραφή των μοντέλων, αυτά μπορούν να κατηγοριοποιηθούν με βάση τα ακόλουθα κριτήρια (Velten, 2009). (α) *Γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα* (linear – non linear models): στα γραμμικά μοντέλα, οι άγνωστες παράμετροι (ή οι παράγωγοί τους) ευρίσκονται σε γραμμικό συνδυασμό, δηλαδή απλά προστίθενται αλγεβρικά μεταξύ τους. Στα μη γραμμικά μοντέλα, οι παράμετροι αυτοί συνδυάζονται μέσω μιας οποιασδήποτε συναρτησιακής σχέσης πέραν της γραμμικής. Τα τελευταία αυτά μοντέλα τυπικά έχουν πολλές και ενδιαφέρουσες ιδιότητες, αλλά είναι δυσκολότερο να επιλυθούν αναλυτικά, δηλαδή μέσω κλειστών μαθηματικών τύπων. (β) *Αναλυτικά και αριθμητικά μοντέλα* (analytical – numerical models): στα αναλυτικά μοντέλα, η συμπεριφορά του συστήματος μπορεί να εκφραστεί με όρους στοιχειωδών μαθηματικών συναρτήσεων, οι οποίες εμπεριέχουν όλες τις απαραίτητες παραμέτρους του προβλήματος. Στην περίπτωση αυτή, η ποιοτική συμπεριφορά των παραμέτρων και του μελετώμενου συστήματος μπορεί να ερμηνευθεί θεωρητικά, χωρίς να είναι απαραίτητο να έχουν οι παράμετροι αυτές κάποια συγκεκριμένη ειδική τιμή. Αντίθετα, τα αριθμητικά μοντέλα



χρησιμοποιούνται για να ληφθεί η συμπεριφορά του μελετώμενου συστήματος για ειδικές τιμές των παραμέτρων. (γ) *Αυτόνομα και μη αυτόνομα μοντέλα* (autonomous – non autonomous models): στα αυτόνομα μαθηματικά συστήματα εμπλέκονται μονάχα οι σχετικές παράμετροι και όχι οι ανεξάρτητες μεταβλητές, όπως ο χρόνος ή οι χωρικές συντεταγμένες. (δ) *Συνεχή και διακριτά μοντέλα* (continuous – discrete models): στα συνεχή μοντέλα, οι ανεξάρτητες μεταβλητές μπορούν να θεωρούνται ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, ενώ στα διακριτά μοντέλα, οι ανεξάρτητες μεταβλητές λαμβάνουν μονάχα διακεκριμένες τιμές. (ε) *Εξισώσεις διαφορών* (difference equations): στις εξισώσεις αυτού του τύπου, οι σχετικές ποσότητες λαμβάνονται ως μια ακολουθία διακεκριμένων τιμών. Συνήθως, αυτές εκφράζονται μέσω επαναληπτικών σχέσεων, όπου κάθε όρος της ακολουθίας εξαρτάται από τον προηγούμενο όρο. (στ) *Διαφορικές εξισώσεις* (differential equations): οι εξισώσεις αυτές περιλαμβάνουν παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης και αποτελούν το κύριο μεθοδολογικό εργαλείο για την περιγραφή συνεχών μηχανιστικών μαθηματικών μοντέλων. (ζ) *Ολοκληρωτικές εξισώσεις* (integral equations): οι εξισώσεις αυτές περιλαμβάνουν ολοκληρώματα της άγνωστης συνάρτησης. (η) *Αλγεβρικές εξισώσεις* (algebraic equations): οι εξισώσεις αυτές περιλαμβάνουν τους συνήθεις αλγεβρικούς τελεστές, δηλαδή την πρόσθεση, την αφαίρεση, τη διαίρεση κ.λπ.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί η χρήση των στατιστικών μοντέλων, τα οποία αφορούν τον έλεγχο υποθέσεων για το γεγονός εάν ένα σύνολο εμπειρικών δεδομένων αποτελεί μέρος μιας συγκεκριμένης κατηγορίας. Οι κατηγορίες αυτές έχουν συγκεκριμένες κατανομές, με σχετικούς μέσους και τυπικές αποκλίσεις, και στόχος αποτελεί ο προσδιορισμός μιας συνάρτησης συχνότητας και συγκεκριμένα ένα μέτρο σχέσης που ποσοτικοποιεί τη σχέση μεταξύ του μελετώμενου προσδιοριστή και της έκβασης. Ο κατάλληλος μεθοδολογικός σχεδιασμός και ο περιορισμός στο μεγαλύτερο δυνατό βαθμό του τυχαίου και του συστηματικού σφάλματος αποτελούν το καθοριστικό βήμα στη διεξαγωγή μιας μελέτης και την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων. Εξίσου σημαντική βεβαίως είναι και η στατιστική επεξεργασία των δεδομένων με την επιλογή της κατάλληλης μεθόδου ανάλογα με το είδος τόσο της ερευνητικής υπόθεσης όσο και των δεδομένων. Η γνώση του σχεδιασμού μιας μελέτης και δευτερευόντως της ανάλυσης των δεδομένων είναι ζητήματα πρωταρχικής σημασίας.

Μεθοδολογική προσέγγιση ενός μαθηματικού προτύπου

Η ορθή θεωρητική εξήγηση συνήθως διευρύνει και συνάμα βαθαίνει την κατανόηση ενός ερευνητικού πεδίου. Σε γενικές γραμμές, τα μοντέλα θα πρέπει να διακρίνονται από τις ακόλουθες γενικές ιδιότητες: την ακρίβεια, τη γενικότητα και τον πραγματισμό τους. Η ακρίβεια εξαρτάται από το σκοπό που θα εξυπηρετήσει το εκάστοτε μοντέλο. Σε πλείστες περιπτώσεις, η ακρίβεια αποβαίνει εις βάρος κάποιων αξιοσημείωτων ιδιοτήτων ενός μοντέλου και κυρίως της γενικότητάς του. Το μοντέλο οφείλει να περιγράψει όσο το δυνατόν ευρύτερες όψεις της πραγματικότητας και όχι κάποιες ιδιαιτερότητες ενός συγκεκριμένου συστήματος. Ο πραγματισμός αποτελεί τη φιλοσοφική θεωρία κατά την οποία αληθές είναι μόνο ό,τι πρακτικά ωφελεί στη ζωή. Ένα μη πραγματιστικό μοντέλο είναι ακατάλληλο, όσο εύστοχα και εάν προσεγγίζει τα φυσικά φαινόμενα. Με διαφορετική διατύπωση, ένα



μαθηματικό μοντέλο θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από την αναπαραστατική ικανότητά του. Ως *αναπαραστατική ικανότητα* ορίζεται ένας συνδυασμός του πλήθους των ουσιωδών χαρακτηριστικών ενός μοντέλου που αντιστοιχούν σε παρατηρήσιμα στοιχεία του φυσικού συστήματος, καθώς και της ακρίβειας περιγραφής των στοιχείων αυτών. Επομένως, ένα μοντέλο που είτε παραλείπει στοιχεία του φυσικού συστήματος, είτε εμπεριέχει στοιχεία τα οποία δεν αντιστοιχούν σε αυτό, έχει μικρή αναπαραστατική ικανότητα και δεν δύναται να εξηγήσει τα σχετικά με το σύστημα φαινόμενα. Η περιγραφή με μαθηματικές εκφράσεις ενός συστήματος ή φαινομένου αποτελεί μια ιδιαίτερη γνωσιοθεωρητική διαδικασία, η οποία περιλαμβάνει κυρίως τις ακόλουθες δύο φάσεις.

- i. Η αναζήτηση των μεταβλητών που καθορίζουν τη μεταβολή του συστήματος. Ενδεχομένως, σε ένα πρώτο επίπεδο να μην ενσωματωθούν όλοι οι καθοριστικοί παράγοντες του περιγραφόμενου προβλήματος. Επομένως, πρέπει κατ' αρχήν να προσδιορισθεί το *επίπεδο ανάλυσης* του μοντέλου.
- ii. Εν συνεχεία, καθορίζεται ένα σύνολο λογικών θεωρήσεων και υποθέσεων για το υπό μελέτη σύστημα. Οι υποθέσεις αυτές οφείλουν να εμπεριέχουν και κάθε είδους εμπειρικό νόμο που σχετίζεται με το περιγραφόμενο σύστημα.

Για κάποιους λόγους είναι πιθανό να περιοριστούμε με ένα χαμηλό επίπεδο ανάλυσης για το μοντέλο μας, το οποίο ενδέχεται να μας προσφέρει ένα ικανοποιητικό βαθμό μελέτης. Για παράδειγμα, σε ένα στοιχειώδες επίπεδο μελέτης της Φυσικής η επιβραδυντική δράση της δύναμης της τριβής του αέρα μπορεί να αγνοηθεί κατά τη μοντελοποίηση της πτωτικής κίνησης ενός σώματος κοντά στην επιφάνεια της Γης. Ένας επιστήμονας, όμως, η εργασία του οποίου αποτελεί ο ακριβής καθορισμός της πτητικής τροχιάς ενός βλήματος μεγάλου βεληνεκούς, θα πρέπει να λάβει υπ' όψιν του την αντίσταση του αέρα και διάφορους σημαντικούς πρόσθετους παράγοντες, όπως την καμπυλότητα της επιφάνειας της Γης.

Συνοπτικά, η διαδικασία της μοντελοποίησης μπορεί να κωδικοποιηθεί μέσω του **Πίνακα Α'**, όπου απεικονίζεται συνοπτικά η διαδικασία παραγωγής επιστημονικής γνώσης στους μηχανιστικούς κλάδους της Φυσικής, της Χημείας κ.ά. Πρέπει να επισημανθεί το γεγονός πως η διαδικασία αυτή είναι κυκλική, δηλαδή η μελέτη των φυσικών φαινομένων δεν παύει με τον έλεγχο των προβλέψεων του μοντέλου με τα πειραματικά δεδομένα, αλλά η συνάφεια του πειράματος με τις αρχικές υποθέσεις οδηγούν σε νέα τροποποίηση των τελευταίων, περισσότερο διευρυμένων και εκλεπτυσμένων. Αυτή η αέναη δράση αποτελεί την πεμπτουσία της επιστημονικής δραστηριότητας. Η ατέρμονη αυτή κίνηση και εξέλιξη μπορεί να ερμηνευθεί από το γεγονός ότι η επαγωγή, η συλλογή και η ερμηνεία των μεμονωμένων δεδομένων, τα οποία παρέχουν τις πρώτες ύλες για τους επιστημονικούς νόμους και τις θεωρίες και σε αυτά εδράζονται τα θεμέλια των περισσότερων επιστημονικών διαδικασιών, θεμελιώνονται στη δημιουργικότητα κάθε επιστήμονα. Όμως, δεν υπάρχει καμία εγγύηση για αυτό, διότι το εύρος, η φύση και η εφαρμογή της δημιουργικότητας είναι προσωπικό γνώρισμα κάθε ατόμου.

Πίνακας Α': Η προτυποποίηση ενός φυσικού προβλήματος

| | | |
|---------------------|--|--------------------------------|
| 1. Υποθέσεις | Εκφράζονται οι υποθέσεις με όρους διαφορικών | 2. Μαθηματική διατύπωση |
|---------------------|--|--------------------------------|



| | | |
|--|---|----------------------------------|
| | εξισώσεων | |
| Εάν είναι απαραίτητο, μεταβάλλονται οι υποθέσεις ή αυξάνεται το επίπεδο της ανάλυσης | | Επίλυση των διαφορικών εξισώσεων |
| 4. Έλεγχος των προβλέψεων του μοντέλου με τα πειραματικά δεδομένα | Επίδειξη των προβλέψεων του μοντέλου (π.χ. μέσω γραφημάτων) | 3. Λύσεις του προβλήματος |

Συχνά, ένα μαθηματικό μοντέλο ενός φυσικού συστήματος εμπεριέχει ως μεταβλητή το χρόνο t . Στην περίπτωση αυτή, η επίλυση του μοντέλου δίδει την κατάσταση του συστήματος (state of the system), δηλαδή οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής (ή των μεταβλητών) για κατάλληλες τιμές του χρόνου t περιγράφουν το σύστημα κατά το παρελθόν, το παρόν και το μέλλον του. Εφόσον διαθέτουμε τη λύση (ή τουλάχιστον κάποια ποιοτική πληροφορία για αυτήν), πρέπει να την ερμηνεύσουμε στο εννοιολογικό πλαίσιο που θέτει το πρόβλημα. Για παράδειγμα, ένας τέτοιος έλεγχος θα μπορούσε να εμπεριέχει τον υπολογισμό των τιμών της λύσης σε επιλεγμένα σημεία και τη σύγκρισή τους με πειραματικές τιμές ή μπορεί να τεθεί το ερώτημα κατά πόσον η συμπεριφορά της λύσης μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα είναι συμβατή με τις παρατηρήσεις. Ακόμη, είναι δυνατόν να εξετασθούν οι λύσεις που αντιστοιχούν σε ειδικές τιμές κάποιων παραμέτρων του προβλήματος. Βεβαίως, παρά το γεγονός πως μια μαθηματική λύση διαγράφεται λογική, αυτό δεν εγγυάται και την ορθότητά της. Ωστόσο, εάν η λύση εμφανίζει σοβαρές αποκλίσεις σε σχέση με προσεκτικές παρατηρήσεις της συμπεριφοράς του περιγραφόμενου φυσικού συστήματος, αυτό υποδηλώνει είτε σφάλματα κατά την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος, είτε πως το μαθηματικό μοντέλο καθ' εαυτό είναι υπερβολικά χονδροειδές. Τα τέσσερα βασικά στάδια, τα οποία κωδικοποιούνται στο προαναφερθέν **Πίνακα Α'**, εκθέτονται αναλυτικά στις επόμενες παραγράφους.

(Α) Ο όρος *υπόθεση* θα πρέπει να χρησιμοποιείται πάντοτε προσεκτικά. Για παράδειγμα, όταν ο Νεύτων δήλωσε ότι δεν διατύπωσε κάποια υπόθεση για την αιτία της βαρύτητας, αξίωνε πως δεν είχε εκφράσει κάποια εικασία σχετικά με το λόγο που ο νόμος της βαρύτητας ενεργεί με το συγκεκριμένο τρόπο. Στην περίπτωση αυτή, ο Νεύτων χρησιμοποίησε τον όρο υπόθεση για να αναφερθεί σε μια πρόδρομη θεωρία. Ως λύση στο πρόβλημα της υπόθεσης, ο Sonleitner (1989) πρότεινε οι γενικευτικές υποθέσεις να ονομαστούν προσωρινοί ή δοκιμαστικοί νόμοι και οι προσωρινές θεωρίες να περιγράφονται ως εξηγητικές υποθέσεις. Μια ακόμη προσέγγιση θα ήταν να εγκαταλειφθεί η λέξη υπόθεση προς χάριν άλλων όρων, όπως υποθετικοί νόμοι ή υποθετικές θεωρίες. Με τη συγκέντρωση στοιχείων, οι γενικευτικές υποθέσεις μπορεί να γίνουν νόμοι και οι υποθετικές θεωρίες, όμως σε καμία περίπτωση δεν μπορούν οι θεωρίες να γίνουν νόμοι. Σχετικά με τις υποθέσεις, οι οποίες στην πραγματικότητα αποτελούν προγνώσεις, ίσως θα έπρεπε απλά να ονομάζονται προβλέψεις



(McComas, 1998). Σε γενικές γραμμές, διαφορετικές υποθέσεις οδηγούν σε διαφορετικά μοντέλα.

(B) Από τη στιγμή που καθορίζονται οι υποθέσεις του υπό μελέτη συστήματος, αυτές συχνά περιλαμβάνουν έναν *ρυθμό μεταβολής* μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών. Διαφορετικά, η μαθηματική απεικόνιση κάθε είδους αρχικών θεωρήσεων δύναται να περιλαμβάνει μία ή περισσότερες εξισώσεις, οι οποίες να περικλείουν τις *παραγώγους* των μεταβλητών μεγεθών. Σε μια αυστηρότερη διατύπωση, η μοντελοποίηση του προβλήματος οδηγεί σε μία διαφορική εξίσωση ή σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε πως οι μαθηματικές εξισώσεις αποτελούν σχεδόν πάντα μια προσεγγιστική περιγραφή της πραγματικής διαδικασίας, αφού βασίζονται σε παρατηρήσεις, οι οποίες δεν είναι παρά επίσης προσεγγίσεις. Για παράδειγμα, σώματα που κινούνται με ταχύτητες συγκρίσιμες εκείνης του φωτός δεν ικανοποιούν τους Νευτώνειους νόμους, πληθυσμοί εντόμων δεν αυξάνουν απεριόριστα εξαιτίας φυσικών περιορισμών στα αποθέματα τροφής τους, ενώ η μεταφορά θερμότητας επηρεάζεται και από άλλους παράγοντες πέραν της θερμοκρασιακής διαφοράς. Επιπλέον, η διαδικασία διατύπωσης ενός φυσικού προβλήματος με μαθηματικούς όρους συχνά εμπεριέχει την εννοιολογική αντικατάσταση διακριτών διαδικασιών από συνεχείς. Για παράδειγμα, ο αριθμός των μελών ενός πληθυσμού εντόμων μεταβάλλεται κατά διακριτές ποσότητες, ωστόσο εάν ο πληθυσμός είναι μεγάλος, τότε διαφαίνεται λογικό να θεωρηθεί ως μια συνεχής μεταβλητή και να χρησιμοποιηθεί ακόμα και η παράγωγός του. Από την αντίθετη άποψη, μπορεί να υποστηριχθεί πως οι μαθηματικές εξισώσεις περιγράφουν επακριβώς τη λειτουργία ενός απλοποιημένου μοντέλου, το οποίο κατασκευάστηκε (ή καταστρώθηκε νοητά) κατά τρόπον ώστε να ενσωματώνει τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά της πραγματικής διαδικασίας.

(Γ) Μετά τη μαθηματική διατύπωση του υπό μελέτη συστήματος ή φαινομένου μέσω κάποιων διαφορικών εξισώσεων αντιμετωπίζουμε το ουσιαστικό πρόβλημα της επίλυσής του. Εάν μπορεί πράγματι να επιλυθεί αναλυτικά, τότε εξετάζεται εάν το μοντέλο μας είναι συνεπές με τα πειραματικά και εμπειρικά δεδομένα της πραγματικής συμπεριφοράς του συστήματος. Φυσικά, αυξάνοντας το επίπεδο ανάλυσης, τότε προσθέτουμε στην πολυπλοκότητα του μαθηματικού μοντέλου και η πιθανότητα να εξαχθεί μία ακριβής και αναλυτική λύση μειώνεται δραστικά. Ενδεχομένως, η μαθηματική επίλυση του προβλήματος να παρουσιάζει ιδιαίτερες τεχνικές δυσκολίες, με αποτέλεσμα την εφαρμογή περαιτέρω προσεγγίσεων, ώστε το πρόβλημα να καταστεί προσιτό από μαθηματικής απόψεως. Για παράδειγμα, μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση μπορεί να προσεγγισθεί από μία γραμμική, ή μια βραδέως μεταβαλλόμενη συνάρτηση να αντικατασταθεί από τη μέση τιμή της. Βέβαια, κάθε προσέγγιση αυτού του είδους πρέπει επίσης να εξετάζεται από φυσική σκοπιά, ώστε το απλοποιημένο μαθηματικό πρόβλημα να συνεχίζει να αντανακλά τα ουσιαστικά χαρακτηριστικά της εξεταζόμενης φυσικής διαδικασίας. Παράλληλα, η γνώση της φυσικής διαδικασίας του προβλήματος μπορεί να υποδείξει κατάλληλες μαθηματικές προσεγγίσεις, οι οποίες θα καταστήσουν ευκολότερη την ανάλυση του προβλήματος. Αυτή η αλληλεπίδραση μεταξύ της κατανόησης φυσικών φαινομένων και της γνώσης μαθηματικών μεθόδων, καθώς και των



περιορισμών τους, αποτελεί χαρακτηριστικό των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και είναι απαραίτητη για την επιτυχή κατασκευή χρήσιμων μαθηματικών μοντέλων περιγραφής περίπλοκων φυσικών διεργασιών.

Ως συνέπεια, πολλοί επιστήμονες έθεταν με μαθηματικές εκφράσεις το φυσικό πρόβλημα και συχνά αφιέρωναν έτη μελέτης των συγκεκριμένων διαφορικών εξισώσεων, καθώς αναζητούσαν κάποια είδους λύση. Κατόπιν, ακολουθούσε η μελέτη των ιδιοτήτων τους. Ο τρόπος αυτός έρευνας ονομάζεται *αναλυτική προσέγγιση*. Όμως, πολλές φορές είναι αρκετά δύσκολο (ή και αδύνατον) να επιτευχθεί μία αναλυτική λύση και οι μαθηματικοί έχουν κατανοήσει πως μία διαφορική εξίσωση δύναται να αποτελεί πηγή πολύτιμων πληροφοριών κατά διάφορους τρόπους. Μέχρι τα τέλη του 18^{ου} αιώνα είχαν ανακαλυφθεί πλήθος μεθόδων επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Κατά τον αιώνα που ακολούθησε, το ενδιαφέρον στράφηκε στη διερεύνηση θεωρητικών ερωτημάτων ύπαρξης και μοναδικότητας και στην ανάπτυξη λιγότερο στοιχειωδών μεθόδων, όπως αυτές που βασίστηκαν σε αναπτύγματα δυναμοσειρών. Συνήθως, οι προκύπτουσες διαφορικές εξισώσεις είναι μη γραμμικές και επιλύονται μέσω των γνωστών *ειδικών συναρτήσεων*. Ενδεχομένως, μια ορθότερη ονομασία του πεδίου αυτού των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών να είναι *επώνυμες συναρτήσεις*, καθώς πλείστες από αυτές έλαβαν το όνομα του επιστήμονα που τις πρωτομελέτησε: οι συναρτήσεις Bessel, οι συναρτήσεις Legendre, οι συναρτήσεις Airy, τα πολώνυμα Chebyshev, η υπεργεωμετρική συνάρτηση Gauss, τα πολώνυμα Hermite, τα πολώνυμα Jacobi, τα πολώνυμα Laguerre, οι συναρτήσεις Mathieu, οι συναρτήσεις Weber κ.ο.κ. Διαχρονικά, οι ειδικές συναρτήσεις ήταν ένα αναγκαίο αποτέλεσμα και μία απαραίτητη λύση σε μια ειδική διαφορική εξίσωση, καθώς αυτή πηγάζε από τις προσπάθειες κάποιων επιστημόνων να περιγράψουν κάποια φυσικά φαινόμενα ή να κωδικοποιήσουν κάποιον εμπειρικό ή πειραματικό νόμο με μαθηματικές εκφράσεις. Αυτές οι μέθοδοι, υπό μία έννοια, επωφελήθηκαν και αναπτύχθηκαν από την ταυτόχρονη εξέλιξη της θεωρίας των μιγαδικών αναλυτικών συναρτήσεων.

Τέλος, ακόμα και εάν κάποια διαφορική εξίσωση δεν διαθέτει κάποια αναλυτική λύση, ενώ μπορεί να αποδειχθεί πως αυτή επιλύεται, τότε ακολουθεί η λογική ερώτηση: *Μπορούμε να προσεγγίσουμε με κάποιο τρόπο τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης;* Μια καταφατική απάντηση στην τελευταία ερώτηση προκύπτει από το γεγονός πως μια διαφορική εξίσωση δύναται να χρησιμοποιηθεί ως ακρογωνιαίος λίθος για την κατασκευή ακριβών προσεγγιστικών αλγορίθμων. Στο σημείο αυτό εισάγεται το πεδίο της *Αριθμητικής Ανάλυσης*. Στο εξαιρετικά λιτό δοκίμιό του *My life as a physicist*¹, ο Paul Dirac αποδίδει εύσημα στην εκπαίδευσή του ως μηχανικού με την οποία άρχισε τις σπουδές του, παρατηρώντας: «*τα μαθήματα μηχανολογίας με επηρέασαν πολύ έντονα... Έμαθα πως στην περιγραφή της φύσης πρέπει να συμβιβάζομαστε με τις προσεγγίσεις και ότι ακόμα και η εργασία με προσεγγίσεις μπορεί να είναι καμιά φορά ενδιαφέρουσα, ενδεχομένως και ωραία*». Σύμφωνα με αυτή τη λογική, μια από τις πηγές της εμπιστοσύνης του Dirac στην ομώνυμη εξίσωσή του, που τον ενθάρρυνε να παραβλέψει τις φαινομενικές της ατέλειες, αποτελούσε η αναζήτηση

¹ Dirac, Paul A.M. (1983). My life as a physicist. In: *The unity of the fundamental interactions*. Antonino Zichichi (ed.). New York, NY: Plenum Press.



προσεγγιστικών λύσεων, τα οποία να συμφωνούν κατά θαυμαστό τρόπο με τα πειραματικά δεδομένα, συγκεκριμένα σχετικά με το φάσμα του υδρογόνου.

Μέχρι τις αρχές του 20^{ου} αιώνα είχαν επινοηθεί αρκετά αποτελεσματικές αριθμητικές μέθοδοι ολοκλήρωσης και προσέγγισης, αλλά η εφαρμογή τους ήταν αυστηρά περιορισμένη λόγω του όγκου των απαιτούμενων υπολογισμών. Η εξέλιξη της τεχνολογίας και των υπολογιστών αύξησε εντυπωσιακά το εύρος των προβλημάτων που μπορούν να διερευνηθούν αποτελεσματικά με αριθμητικές μεθόδους και το πλεονέκτημα αυτό προσέφερε σε κάθε ερευνητή τη δυνατότητα επίλυσης πολλών ουσιωδών προβλημάτων. Οι επιστήμονες αναπτύσσουν και χρησιμοποιούν τα μαθηματικά μοντέλα για αιώνες με σκοπό την κατανόηση της λειτουργίας του φυσικού κόσμου. Παρά όλα αυτά, δεν αποτέλεσε η έμπνευση των σπουδαίων επιστημονικών επιτευγμάτων το μυστικό για την ενασχόληση των επιστημόνων και των μηχανικών με τα μαθηματικά μοντέλα, αλλά κάτι βασικότερο: η ανάδυση της τεχνολογίας των υπολογιστών, η οποία αυτοματοποίησε τις υπολογιστικές διαδικασίες και διατέθηκε σε ένα ευρύτερο κοινό. Είναι αληθές το γεγονός πως η ικανότητα των μοντέλων να απεικονίζουν την πραγματικότητα, τουλάχιστον σε ένα γενικό πλαίσιο, περιορίζεται από την ισχύ και τη λειτουργικότητα των διαθέσιμων υπολογιστικών εργαλείων.

Επίσης, σε κάποιες περιπτώσεις είναι πιθανό να σταχυολογηθούν άμεσα απαντήσεις σε διάφορες ερωτήσεις του τύπου: *Έχει η διαφορική εξίσωση λύσεις; Εάν μια λύση κάποιας διαφορικής εξίσωσης υπάρχει και ικανοποιεί κάποιες αρχικές συνθήκες, τότε η λύση αυτή είναι η μοναδική; Ποιές είναι οι ιδιότητες των άγνωστων λύσεων; Μπορεί να ειπωθεί κάτι για τη γεωμετρία των καμπυλών της λύσης; Μία τέτοια προσέγγιση καλείται ποιοτική ανάλυση.* Χαρακτηριστικό της μαθηματικής έρευνας του 20^{ου} αιώνα αποτέλεσε η δημιουργία γεωμετρικών ή τοπολογικών μεθόδων, ειδικότερα για τις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, με στόχο την κατανόηση τουλάχιστον της ποιοτικής συμπεριφοράς των λύσεων από γεωμετρική και αναλυτική άποψη.

(Δ) Για τους περισσότερους επιστήμονες που διερευνούν μια καινούρια θεωρία, το κυριότερο κριτήριο της αξιοπιστίας της είναι η συμφωνία της ή όχι με το πείραμα. Ο πειραματισμός αποτελεί αυτόνομη διαδικασία, η οποία αλληλεπιδρά με τη διατύπωση εικασιών, τους υπολογισμούς, την κατασκευή μοντέλων, την εφεύρεση και την τεχνολογία με πολυάριθμους τρόπους. Εκείνος που διατυπώνει εικασίες, πραγματοποιεί υπολογισμούς ή δημιουργεί μαθηματικά μοντέλα μπορεί να είναι ιδεαλιστής, ενώ ο πειραματιστής πρέπει να είναι ρεαλιστής. Η θεωρία και το πείραμα έχουν διαφορετικές σχέσεις στις διάφορες επιστήμες, στα διάφορα στάδια της ανάπτυξής τους. Ο Einstein, στο ίδιο βιβλίο του 1934, παρατήρησε πως: *"το πείραμα εξακολουθεί να παραμένει, βεβαίως, το μοναδικό κριτήριο για τη χρησιμότητα στη φυσική μιας μαθηματικής κατασκευής"*. Όμως, εάν οι παραγόμενες προβλέψεις από τη μαθηματική επίλυση του προβλήματος δίδουν φτωχά αποτελέσματα, μπορούμε να αυξήσουμε το επίπεδο ανάλυσης του μοντέλου ή να πραγματοποιηθούν εναλλακτικές υποθέσεις για τους δρώντες μηχανισμούς της μεταβολής του συστήματος.

Τα πειράματα έχουν ως πρωταρχικό στόχο τη συσχέτιση αιτίας και αποτελέσματος. Η παρατήρηση και ο πειραματισμός διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην επιστήμη: χρησιμοποιούνται για να ελέγξουν μοντέλα, να καταρρίψουν ανεπαρκείς υποθέσεις, και με



τον τρόπο αυτό βοηθούν στη διαμόρφωση βελτιωμένων ερμηνειών των φυσικών φαινομένων. Βεβαίως, τα πειράματα είναι ένα ωφέλιμο επιστημονικό εργαλείο, αλλά δεν αποτελούν τη μοναδική ατραπό προς τη γνώση. Πολλοί επιστήμονες χρησιμοποίησαν τεχνικές που δεν ήταν πειραματικές για να προάγουν τη γνώση. Στην πραγματικότητα, σε ορισμένα επιστημονικά πεδία το πείραμα δεν είναι δυνατό, εξαιτίας της αδυναμίας ελέγχου των μεταβλητών. Για παράδειγμα, δεν δύναται να εμποδίσουμε τη σύντηξη του Ήλιου ή την περιστροφή της Γης για να εξακριβώσουμε ή να επαληθεύσουμε τις ιδέες μας, αλλά η καθημερινή παρατήρηση της ανατολής και της δύσης ενισχύει την εμπιστοσύνη μας στην αποδεκτή ερμηνεία των ουράνιων φαινομένων. Επίσης, πάμπολλες θεμελιώδεις αστρονομικές ανακαλύψεις στηρίζονται σε εκτεταμένες παρατηρήσεις παρά σε πειράματα. Ο Κοπέρνικος και ο Kepler μετέβαλλαν την ανθρώπινη οπτική για το ηλιακό σύστημα με στοιχεία από λεπτομερείς παρατηρήσεις, αλλά κανένας τους δεν πραγματοποίησε άμεσα πειράματα (Butterfield, 2005). Παρομοίως, σε ποικίλες οικολογικές καταστάσεις, ιδίως σε αυτές που σχετίζονται με την εξέλιξη των προσαρμογών, ο άμεσος πειραματισμός είναι συχνά ανέφικτος ή αδύνατος. Ορισμένα οικολογικά φαινόμενα μπορούμε πράγματι να τα χειρισθούμε, αλλά, όπως και οι αστρονόμοι, οι εξελικτικοί οικολόγοι βασίζονται κυρίως στην προσεκτική συγκριτική προσέγγιση (ορισμένες φορές αναφέρεται ως "φυσικό" πείραμα).

Επίλογος

Θα πρέπει να επισημανθεί το γεγονός πως κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης κάποιου φυσικού φαινομένου ενδέχεται πολλοί επιστήμονες να υποπέσουν σε εσφαλμένες ερμηνείες επιστημολογικού χαρακτήρα. Οι παρανοήσεις αυτές πηγάζουν πιθανότατα από την απουσία μαθημάτων φιλοσοφίας της επιστήμης στα εκπαιδευτικά προγράμματα, καθώς και στην ανεπάρκεια αυτών να προσφέρουν εμπειρίες και ευκαιρίες πραγματικής επιστημονικής έρευνας (McComas, 1998). Ακόμη, μια πιθανή εξήγηση μπορεί να αποτελεί η γενικώς επιφανειακή προσέγγιση της φύσης της επιστήμης στα εκπαιδευτικά εγχειρίδια, όπου οι διδάσκοντες ανατρέχουν για καθοδήγηση. Ο McComas (1998) προτείνει περί τους δεκαπέντε μύθους, οι οποίοι αντιπροσωπεύουν επιστημολογικές παρερμηνείες. Οι παρανοήσεις αυτές είναι: (1) Οι υποθέσεις γίνονται θεωρίες που με τη σειρά τους μετατρέπονται σε νόμους. (2) Οι νόμοι της επιστήμης και οι άλλες παρόμοιες ιδέες είναι απόλυτοι. (3) Μια υπόθεση είναι μια βάσιμη εικασία. (4) Υπάρχει μια γενική και καθολική επιστημονική μέθοδος. (5) Τα στοιχεία που συγκεντρώνονται προσεκτικά θα οδηγήσουν σε βέβαιη γνώση. (6) Η επιστήμη και οι μέθοδοί της παρέχουν απόλυτες αποδείξεις. (7) Η επιστήμη είναι περισσότερο διαδικασία παρά δημιουργία. (8) Η επιστήμη και οι μέθοδοι της μπορούν να δώσουν απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα. (9) Οι επιστήμονες είναι ιδιαίτερα αντικειμενικοί. (10) Τα πειράματα είναι η κύρια οδός προς την επιστημονική γνώση. (11) Τα επιστημονικά συμπεράσματα επανελέγχονται για την ακρίβειά τους. (12) Η αποδοχή της νέας επιστημονικής γνώσης είναι άμεση. (13) Τα επιστημονικά μοντέλα αναπαριστούν την πραγματικότητα. (14) Η επιστήμη και η τεχνολογία είναι ταυτόσημες. (15) Η επιστήμη είναι μια μοναχική αναζήτηση. Παρόμοια, πολλοί μελετητές έχουν προτείνει και διάφορες



παρανοήσεις, οι οποίες αξίζουν μελέτης, όπως οι Cole² (1986), Rothman³ (1992) και Shermer⁴ (2002).

Εν κατακλείδι, η εφαρμογή των μοντέλων στη γνωσιακή επιστήμη είναι εργαλειακή, καθώς επιχειρείται η διερεύνηση των συνεπειών των επιστημονικών θεωριών. Η διαμόρφωση ενός μοντέλου, το οποίο εμπεριέχει τις απλοποιητικές συμβολικές ιδιότητες του φυσικού συστήματος αναφοράς, στηρίζεται σε ρητή και συγκεκριμένη ενσάρκωση κάποιων θεωρητικών κανόνων και αιτημάτων, ενώ εκθέτει τις λειτουργικές επιδράσεις τους στις προσομοιωμένες πειραματικές συνθήκες. Ως αποτέλεσμα, ο ερευνητής εμβαθύνει κατά τη μελέτη μιας επιστημονικής θεωρίας, συνειδητοποιεί τα αδύναμα σημεία της και το ρόλο των επιμέρους στοιχείων της. Παράλληλα, μπορεί να παρεμβαίνει διορθωτικά και να τροποποιεί τις θεωρητικές προκείμενες, ώστε αυτό να προσεγγίζει ακριβέστερα τη φυσική συμπεριφορά και να γεννά νέες προβλέψεις για συνθήκες που δεν έχουν ακόμα διερευνηθεί πειραματικά. Επομένως, το μοντέλο είναι ένα εργαλείο θεωρητικής διερεύνησης και ανάπτυξης.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Barnes, Belinda and Fulford, R. Glenn (2009). *Mathematical modelling with case studies: a differential equation approach using Maple and MATLAB, Second Edition*. Boca Raton, Florida: CRC Press.
- Bergson, Henri (1959). *L'évolution créatrice, 86e édition*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Broad, Charlie D. (1978). *Kant: an introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Brousseau, Guy (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Butterfield, Herbert (2005). *Η καταγωγή της σύγχρονης επιστήμης (1300-1800), Γ ανατύπωση*. Αθήνα: Εκδόσεις Μορφωτικού Ιδρύματος Εθνικής Τραπέζης.
- Γέμτος, Πέτρος Α. (1987). *Μεθοδολογία των κοινωνικών επιστημών, Μεταθεωρία και ιδεολογική κριτική των επιστημών του ανθρώπου, τρίτη έκδοση*. Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση.
- Δεσποτόπουλος Κωνσταντίνος *et al.*, συλλογικό έργο (1995). *Φιλοσοφικό κοινωνιολογικό λεξικό (πεντάτομο έργο)*. Αθήνα: Εκδόσεις Κ. Καπόπουλος.
- Chalmers, Alan F. (1998). *Τί είναι αυτό που το λέμε επιστήμη; Τρίτη έκδοση*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Cross, Mark (1994). The role and practice of mathematical modelling in industry today, in *Mathematical Modelling Courses for Engineering Education* (Editors: Yaşar Ersoy and Alfredo O. Moscardini). Nato ASI Series, **132**: 7-15.
- Davies, John James (1968). *On the scientific method (general studies)*. Prentice Hall Press.

² Cole, K.C. (1986). Things your teacher never told you about science: nine shocking revelations!. *The Newsday Magazine*, March **23**: 21-27.

³ Rothman, Milton A. (1992). *The science gap: dispelling the myths and understanding the reality of science*. Buffalo, NY: Prometheus Books.

⁴ Shermer, Michael B. (2002). *Why people believe weird things: pseudoscience, superstition, and other confusions of our time*. New York: Henry Holt and Company.



- Dirac, Paul A.M. (1939). The relation between mathematics and physics. *Proceedings of the Royal Society (Edinburgh)*. Volume LIX, February 25, p. 124.
- Düring, Ingemar (1994). *Ο Αριστοτέλης: παρουσίαση και ερμηνεία της σκέψης του, τόμοι Α' και Β'*. Μετάφραση: Παρασκευή Κοτζιά – Παντελή και Αικατερίνη Γεωργίου – Κατσιβέλα. Αθήνα: Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης (Μ.Ι.Ε.Τ.).
- Dym, Clive L. (2004). *Principles of mathematical modelling, second edition*. Elsevier Academic Press.
- Hahn, Hans and McGuinness, Brian F. (1980). *Empiricism, logic and mathematics: philosophical papers*. Springer Netherlands.
- Kragh, Helge (1990). *Dirac: a scientific biography*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Lakatos, Imre and Musgrave, Alan (1970). *Criticism and the growth of knowledge*. London: Cambridge University Press.
- Lindberg, David C. (2003). *Οι απαρχές της δυτικής επιστήμης, η φιλοσοφική, θρησκευτική και θεσμική θεώρηση της ευρωπαϊκής επιστημονικής παράδοσης, 600 π.Χ. – 1450 μ.Χ., Β' ανατύπωση*. Ζωγράφου: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π.
- Μαυρίδης, Αριστείδης; Νίκολης, Ιωάννης; Θηραΐος, Γιώργος; Γκόνος, Ευστάθιος και Σιώτης, Ίων (2004). *Φιλοσοφία και θετικές επιστήμες στον 20^ό αιώνα*. Αθήνα: Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών.
- McComas, William F. (ed.) (1998). *The nature of science in science education: rationales and strategies, Science & Technology Education Library*. Springer Netherlands.
- Medawar, Peter (1984). *The limits of science*. Oxford University Press.
- Minsky, Marvin L. (1965). Matter, minds and models. *Proceedings of the International Federation for Information Processing Congress (IFIP)*. Washington, DC: Spartan Books, pp. 45-49.
- Monod, Jacques (1975). *La recherche en biologie moléculaire*. Paris: Seuil.
- Μπιτσάκης, Ευτύχης Ι. (1987). Επιστημολογία: ορισμός, ρεύματα και λειτουργία. *Ελληνική Φιλοσοφική Επιθεώρηση*, 4 (11): 127-145.
- Μπιτσάκης, Ευτύχης Ι. (1995). *Το αιθαλές δέντρο της γνώσεως: επιστήμες και κοσμοθεωρία*. Αθήνα: Εκδόσεις Άγρα.
- Μπιτσάκης, Ευτύχης Ι. (2008). *Η εξέλιξη των ιδεών της φυσικής, ιστορική και επιστημολογική ανάλυση*. Αθήνα: Εκδόσεις Δαίδαλος – Ι. Ζαχαρόπουλος.
- Platt, John R. (1964). Strong inference: Certain systematic methods of scientific thinking may produce much more rapid progress than others. *Science*, 146 (3642): 347-353.
- Poincaré, Henri (1997). *Η αξία της επιστήμης*. Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.
- Popper, Karl R. (1959). *The logic of scientific discovery*. London: Hutchinson & Co.
- Powers, Jonathan (2000). *Φιλοσοφία και νέα φυσική*, Μετάφραση: Τάσος Κυπριανίδης και Τάσος Τσιαντούλας. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Simon, Herbert A. (1999). *The Sciences of the artificial, third edition*. Cambridge: MIT Press.
- Sonleitner, F.J. (1989). Theories, laws and all that. *National Center for Science Education, Newsletter*, 9 (6): 3-4.



- Steiner, Mark (1995). The applicabilities of mathematics. *Philosophia Mathematica*, **3** (2): 129-156.
- Velten, Kai (2009). *Mathematical modelling and simulation, Introduction for scientists and engineers*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co.
- Wigner, Eugene (1960). The unreasonable effectiveness of Mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **13** (1): 1-14.
- Wilczek, Frank (2002). A piece of magic: the Dirac equation. In *It must be beautiful: great equations of modern science*. Graham Farmelo (ed.), pp. 132-160. New York: Granta Books.
- Windelband, Wilhelm και Heimsoeth, Heinz (1986). *Εγχειρίδιο ιστορίας της φιλοσοφίας, τόμοι Α', Β' και Γ'*. Μετάφραση: Ν.Μ. Σκουτερόπουλος. Αθήνα: Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης (Μ.Ι.Ε.Τ.).
- Wittgenstein, Ludwig (1953). *Philosophical investigations*. New York: MacMillan Publishing Co.